# HÖHERE EXPERIMENTALPHYSIK I

# KERN- UND STRAHLUNGSPHYSIK

Peter Zimmermann

1992

Institut für Strahlungs- und Kernphysik

P. Zimmermann
dezim@web.de

# HÖHERE EXPERIMENTALPHYSIK I

# KERN- UND STRAHLUNGSPHYSIK

Peter Zimmermann

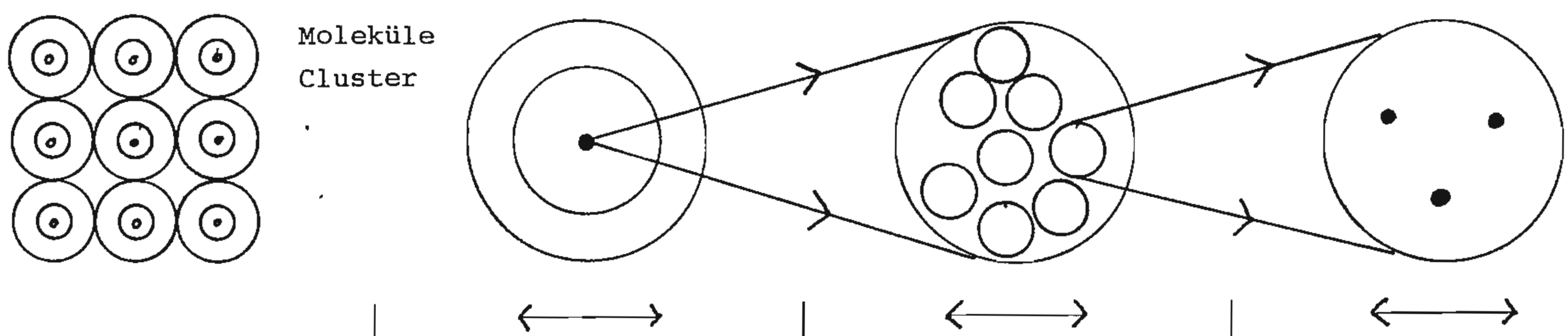
1992

Institut für Strahlungs- und Kernphysik

INHALTSVERZEICHNIS

## 1. Einleitung: Übersicht der verschiedenen Gebiete

Festkörper $\longleftarrow$ Atom Kern Nukleon




| Atom | Kern | Nukleon |
|---|---|---|
| $\approx 10^{-10}$ m | $\approx 5 \cdot 10^{-15}$ m | $\approx 1 \cdot 10^{-15}$ m |
| Dichte $\rho \approx 10^{3}$ kg/m$^3$ | $\rho \sim 10^{17}$ kg/m$^3$ (Neutronensterne) | Quarks |
| Quantenmechanik: ja | ja | |
| Coulombpotential | Kernpotential | |
| $V = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$ | $V = ?$ | |
| | starke WW<br>kurze Reichweite | |
| $V \approx 10$ eV für $r \approx a_0$ | $r \leq 10^{-15}$ m | |

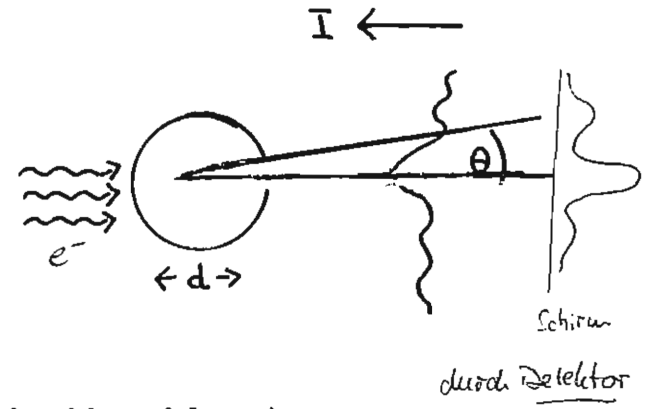
**Übersicht der verschiedenen Wechselwirkungen**

| WW | rel. Stärke | char. Bereiche | Reichweite | Feldquanten | einheitl. Feldtheorien |
|---|---|---|---|---|---|
| Starke | 1 | Kernkräfte | $10^{-15}$ m | Gluonen | ? |
| Elektromagn. | $10^{-2}$ | Atom, Festkörper | $\infty$ | Photonen | Weinberg, Salam |
| Schwache | $10^{-14}$ | Beta-Zerfall | $10^{-17}$ m | intermed. Bosonen | Weinberg, Salam |
| Gravitation | $10^{-39}$ | Kosmos | $\infty$ | Gravitonen (?) | ? |



## 2. Kernradien

Kernradienbestimmung durch Streuexperimente mit hochbeschleunigten Elektronen (Hofstädter-Experimente)




Beugungsmaxima und -minima

Erstes Minimum bei $\sin\Theta \simeq 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{d}$

Bedingung: $\lambda \leq d$

Für Kern: $\lambda \leq 10^{-14}$ m, als 'Licht' sind hochbeschleunigte Elektronen gut geeignet (keine starke WW).

Verknüpfung von Energie E, Impuls p und Wellenlänge $\lambda$ durch relativistische Energiegleichung:

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} \begin{cases} \xrightarrow{pc \gg m_0c^2} E \simeq pc & \text{relat. Teilchen} \\ \xrightarrow{pc \ll m_0c^2} E \simeq m_0c^2 + p^2/2m_0 & \text{nichtrel. Teilchen} \end{cases}$$

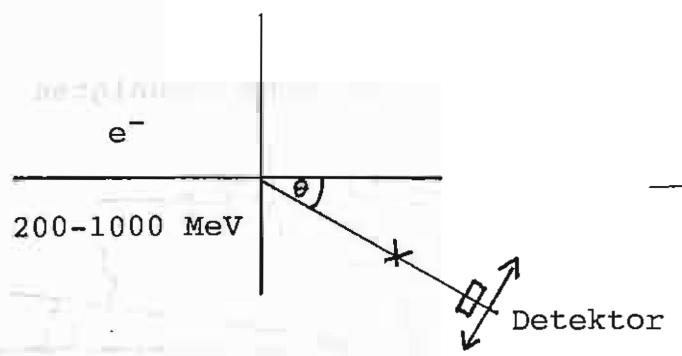
Für relat. Teilchen ($E \gg m_0c^2$, exakt für Teilchen mit Ruhemasse $m_0 = 0$, d.h. Photonen, Neutrinos (?), Gravitonen (?), ...) gilt wegen $E = pc$ für die de Broglie-Wellenlänge $ƛ$:

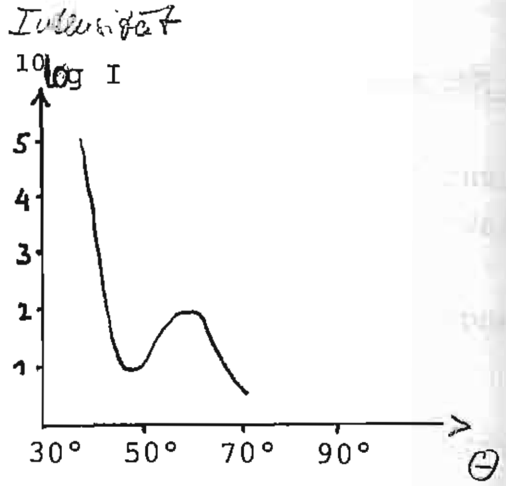
$$ƛ = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{E} \simeq \frac{1 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{6}\ \mathrm{J} \cdot E[\mathrm{MeV}]} \simeq \frac{200 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}{E[\mathrm{MeV}]}$$

$10^{-15}$ m = fm
femtometer

d.h. für $E > 200$ MeV ist $ƛ < 10^{-15}$ m

Hofstädter-Experimente am Linearbeschleuniger in Stanford 1957 (zusammenfassend: Rev. Mod. Phys. <u>30</u>, 142-584 (1958)) praktische Ausführung :



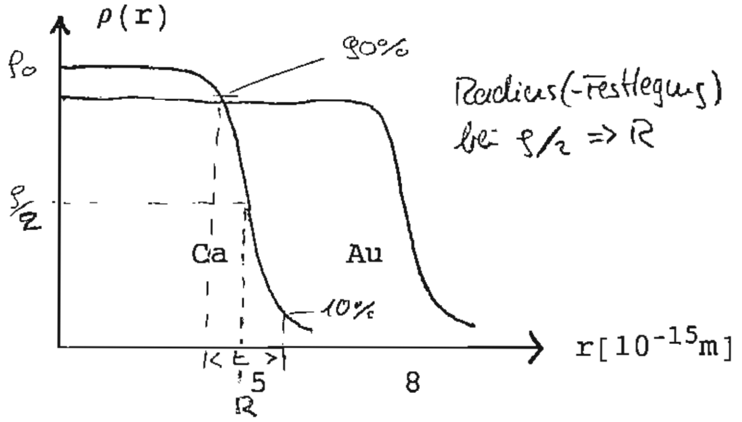




Ergebnis der Messungen für viele Elemente: $R \sim \sqrt[3]{A} = 1{,}2\cdot\sqrt[3]{A}\cdot 10^{-15}$ m

Intensitätsverteil. ⇸ Dichteverteil. d. Kernbausteine

Genauer: kein scharfer Rand

– gibt Dichteverteil. vor, versucht I-Verteil. zu ber.




Radius(-Festlegung) bei $\rho/2 \Rightarrow R$

Für alle Kerne etwa gleiche Ladungsdichte $\rho_0$ im Inneren und gleiche Randbreite von ca. $2\cdot 10^{-15}$ m.

Quantitativ beschreibbar durch die Wood-Saxon-Formel:

$A :=$ Nukleonenzahl $\quad A = Z+N$
$Z :=$ Protonenzahl

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+\exp(\frac{r-R}{a})}$$

Randbreite (90%→10% Abfall) ≈ $4{,}4\cdot a \approx 2{,}4\cdot 10^{-15}$m

'Radius' $R = 1{,}07\cdot\sqrt[3]{A}\cdot 10^{-15}$ m

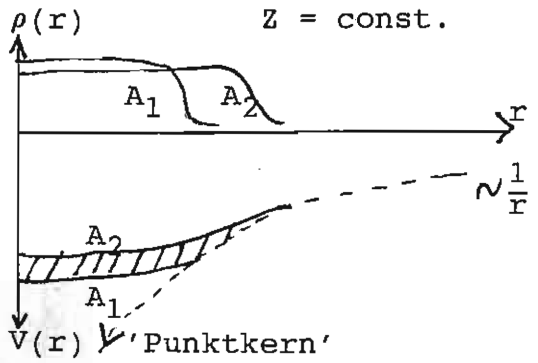
$\rho(0) = 0{,}17\,\frac{Ze}{A}$, $t = 2{,}4$ fm

$\Rightarrow R = 1{,}07\sqrt[3]{A}$ fm

Randzone $t = 4{,}4\cdot a$

Andere Meßmethoden zur Kernradienbestimmung: Isotopieverschiebung (Volumeneffekt) im optischen Bereich

Elemente: ${}^{A}_{Z}X^{N}$



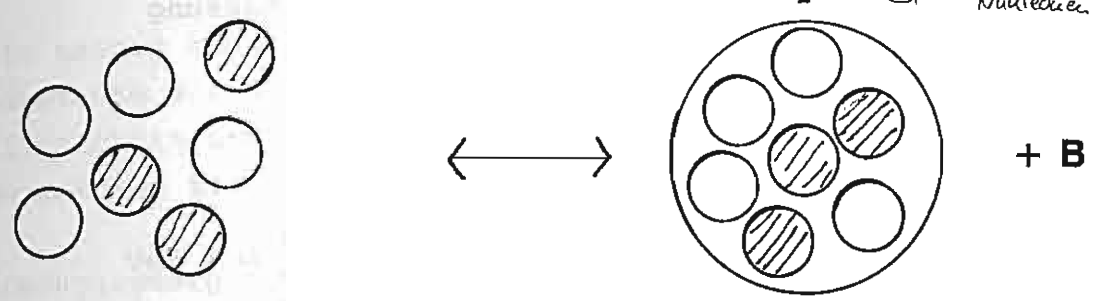

besonders für S-Elektronen wegen deren endlicher Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Kernort.
Noch wesentlich stärkerer Effekt bei myonischen Atomen wegen der ca. 200x kleineren Bahnradien.



## 3. Bindungsenergien, Kernmassen

Bindungsenergie

$B = \sum m_{Nukleonen} - m_{Kern}$




Bindungsenergie $B = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - \underbrace{M(Z, A)\cdot c^2}_{\text{gebund. System}} + Zm_e$

$m_pc^2 = 938{,}256$ MeV

$m_nc^2 = 939{,}550$ MeV

Da man die Massenbestimmung mit atomphysikalischen Meßmethoden (Massenspektrometer) durchführt, versteht man unter $Mc^2$ die Masse des Atoms, d.h. man muß noch die Elektronenmassen abzüglich ihrer Bindungsenergien berücksichtigen. Deshalb bezieht man die Masseneinheit 1 $m_u$ auf 1/12 der Masse des neutralen $C^{12}$-Atoms.

$m_uc^2 = 931{,}\cancel{478}\,50$ MeV/c² $\quad m_p = 1{,}66\cdot 10^{-24}$ g $= 938$ MeV/c², $m_e = 0{,}5$ keV

Prinzip der Massenspektrometrie: Durch die Messung der Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ und des Impulses $p = mv$ wird die Masse $m = p^2/2E$ bestimmt.

→ Nur Teilchen der Masse m erreichen den Schirm

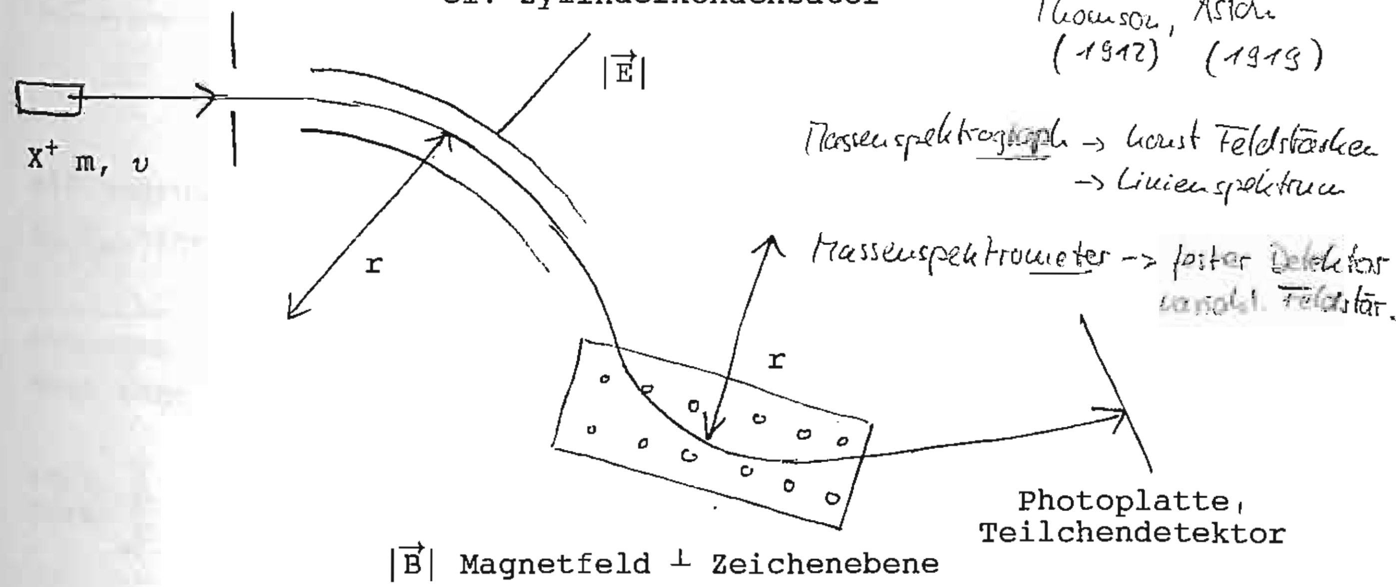
Prinzipieller Aufbau eines Energie- und Impulsfilters in einem Massenspektrographen durch elektrische bzw. magnetische Felder:

(Genauigk. $1\cdot 10^{8}$)

Thomson, Aston
(1912) (1919)

Massenspektrograph → konst. Feldstärken
→ Linienspektrum

Massenspektrometer → fester Detektor
variabl. Feldstär.

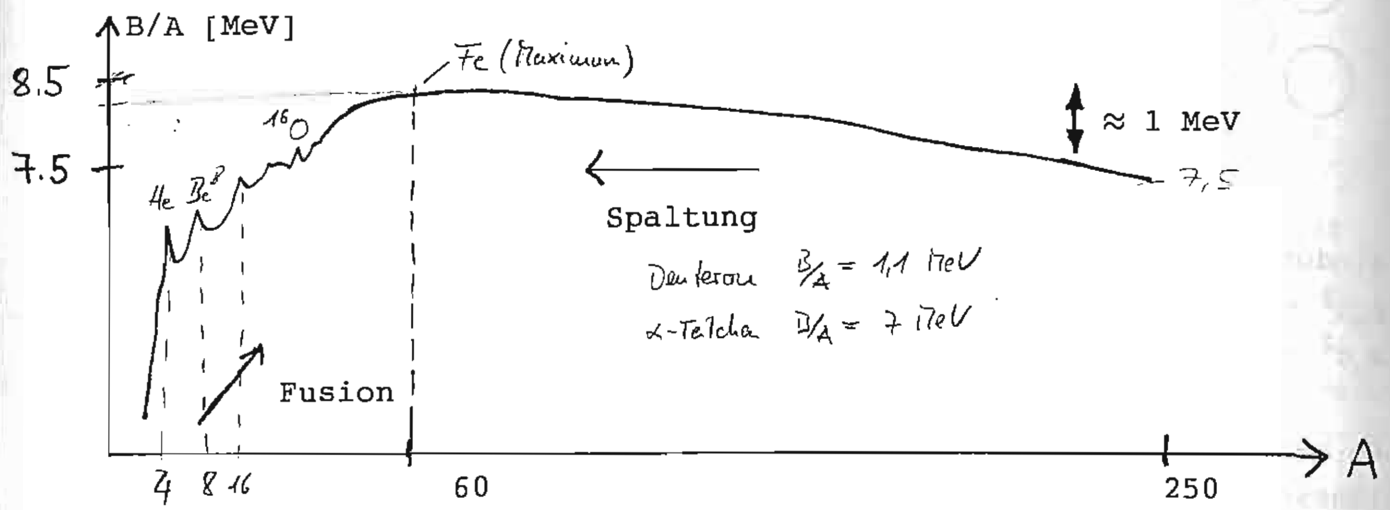


Zentrifugalkraft

el. Feld: $\frac{mv^2}{r} = e\cdot|\vec{E}| \curvearrowright E = \frac{1}{2}mv^2 = e\cdot r\cdot|\vec{E}|$ Energiemessung

magn. Feld: $\frac{mv^2}{r} = ev\cdot|\vec{B}| \curvearrowright p = mv = e\cdot r\cdot|\vec{B}|$ Impulsmessung

Ergebnis für Bindungsenergie pro Nukleon B/A




Im Mittel B/A ≈ 8 MeV, d.h. ≈ 1% der Ruhemasse $m_pc^2$.
Maximum bei ca. A ≈ 60 (Eisen), danach wegen wachsender Coulombabstoßung Abnahme um ca. 1 MeV auf B/A ≈ 7,5 MeV bei A ≈ 230.

Größere Unregelmäßigkeiten bei leichten Kernen bis A ≈ 20, besonders ausgeprägt bei:

| | | |
|---|---|---|
| Deuterium | $p + n \rightarrow d + 2{,}2$ MeV | B/A = 1,1 MeV |
| Helium | $d + d \rightarrow \alpha + 24$ MeV | $B(\alpha)$ = 28 MeV |
| | | B/A = 7 MeV |

1) Genauigkeit
2) Kern mit Atomhülle
3) relative Messung (nur versch. Isotope)
atom. Masseneinheit $1u = \frac{1}{12} m(^{12}C)$
4) „Mass-Excess" $= \Delta = M - A \Rightarrow M = A + \Delta = 1u\,A + \Delta$ (nur Δ in Tabellen angegeben)



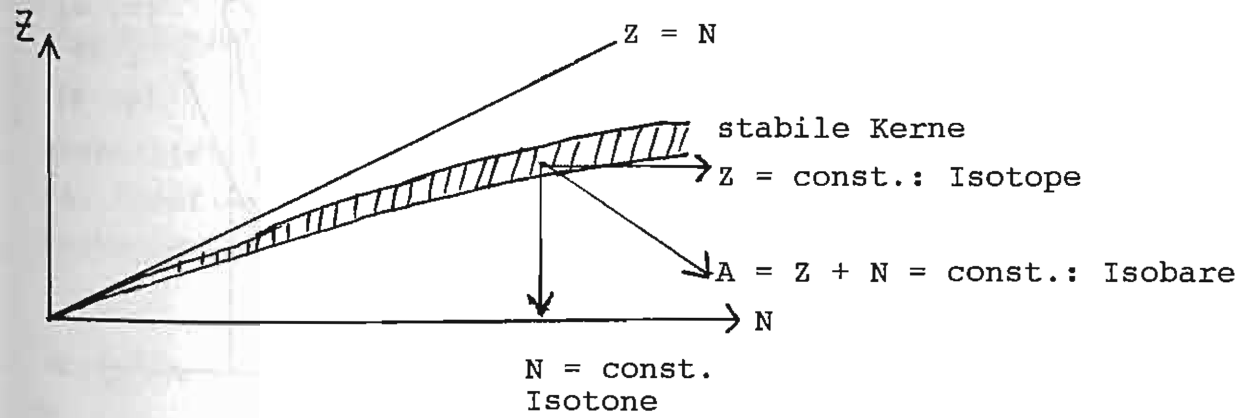
## 4. Tröpfchenmodell, Weizsäckersche Massenformel

Die nahezu konstante Nukleonendichte $\rho \simeq 10^{17}$ kg/m$^3$ und der nahezu konstante B/A-Wert ("Kondensationswärme") legt die Analogie zum Flüssigkeitstropfen nahe.
Weizsäcker Z. Phys. 96, 431 (1935) Massenformel

Bindungsenergie setzt sich aus 5 Anteilen zusammen:
$B = \sum_{i=1}^{5} B_i$

1. $B_1 = a_1\cdot A$ Volumenenergie ("Kondensationswärme") vermindert um
2. $B_2 = -a_2\cdot A^{2/3}$ Oberflächenenergie ~ Anzahl der Nukleonen an der Oberfläche, die weniger stark gebunden sind.
3. $B_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{5}{3}\,\frac{Z(Z-1)e^2}{R}$ Coulombenergie einer homogen
$= -a_3\cdot\frac{Z(Z-1)}{\sqrt[3]{A}}$ geladenen Kugel

Durch die Coulombenergie $B_3$ würden für Isobare (A = const) zu stark Kerne mit vielen Neutronen bevorzugt. In Wirklichkeit ist jedoch Z ≈ N.
Genauer: Nuklidkarte




Als Gegengewicht gegenüber dem Coulombterm deshalb:
4. $B_4 = -a_4\cdot\frac{(N-Z)^2}{A}$ Asymmetrie-Energie

Außerdem gilt folgende Regel, wenn man die Kerne bezüglich gerader oder ungerader Protonen- oder Neutronenzahl ordnet:

| | (g, g) → | (u, g), | (g, u) → | (u, u) → Abnahme der Stabilität |
|---|---|---|---|---|
| stab. Kerne | 158 | 50 , | 53 | 6 |

Deshalb

5. $B_5 = \delta = a_5 \cdot \frac{1}{\sqrt{A}}$   mit   (g, g): $+\delta$
(u, g), (g, u): 0
(u, u): $-\delta$

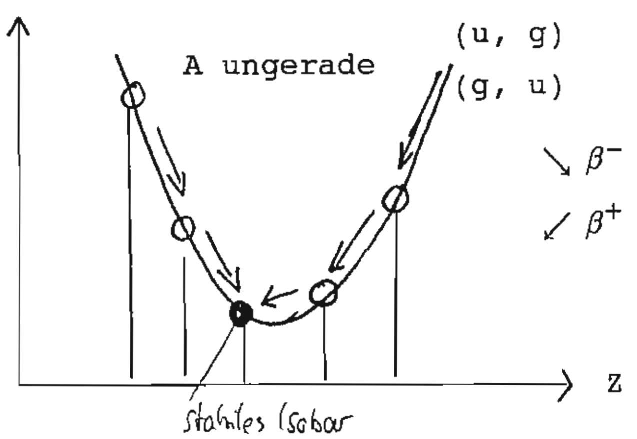
Anpassung der Formel an viele Massenwerte gibt einen optimalen Wertesatz für die 5 Parameter $a_i$: $a_1$ = 16 MeV, $a_2$ = 18 MeV, $a_3$ = 0,7 MeV, $a_4$ = 23 MeV und mit $a_5$ = 12 MeV (Seeger Nucl. Phys. 25, 1 (1961)).
Genauigkeit ≈ 1% ab ≃ 40.

**Folgerungen aus der Weizsäckerschen Massenformel:**

**I. Isobarenregeln**

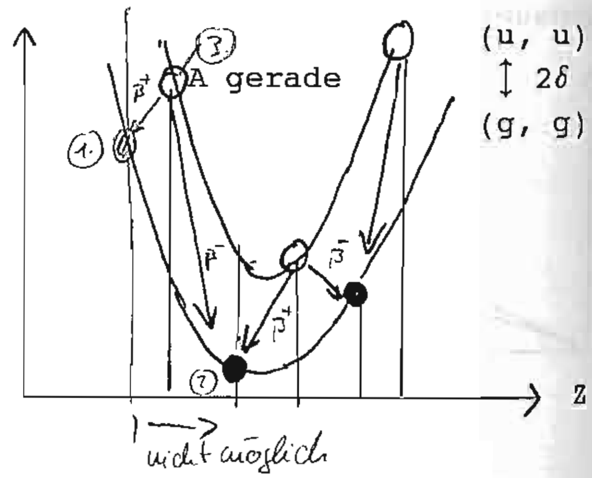
Für Isobare (A = const.) ist die Massenformel quadratisch in Z, deshalb bekommt man für A = ungerade, d.h. für (u, g)- und (g, u)-Kerne eine Parabel und für A = gerade, d.h. für (g, g)- und (u, u)-Kerne zwei Parabeln, die durch den Abstand 2 $\delta$ der Paarungsenergie $\delta$ getrennt sind.

M(Z, A = const.) $\sim Z^2$




Nur ein stabiles Isobar

M(Z, A = const.)




Mehrere stabile Isobare möglich mit $\Delta Z$ = 2

Trägt man die Massenwerte in die Nuklidkarte auf der N-Z-Ebene nach oben auf, dann sind die Isobarenparabeln Schnitte längs der Linie A = Z + N = const. Die stabilen Kerne liegen in der "Talsohle des Massetals".



Umwandlung durch Beta-Zerfall:

$\beta^-$: $n \to p + e^- + \tilde{\nu}$

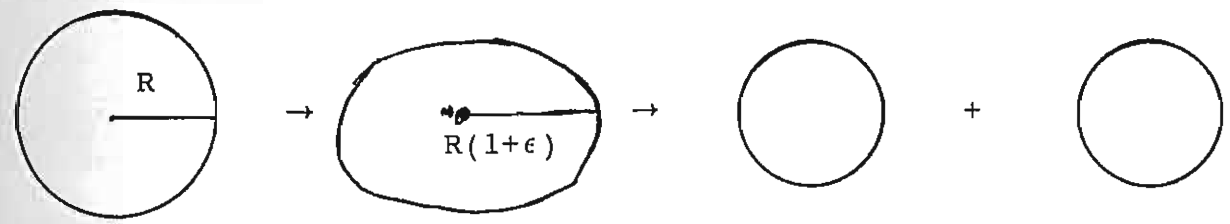
$\beta^+$: $p \to n + e^+ + \nu$

$e^- + p \to n + \nu$   Konkurrenzprozeß: K-Einfang

**II. Kernspaltung und Fusion**

Allgemein für leichtere Kerne Energiegewinn durch Fusion, für schwerere Kerne durch Spaltung möglich. Spontane Fusion durch Coulombabstoßung, spontane Spaltung durch Spaltschwelle behindert.

Stabilitätsbetrachtung bezüglich spontaner Spaltung

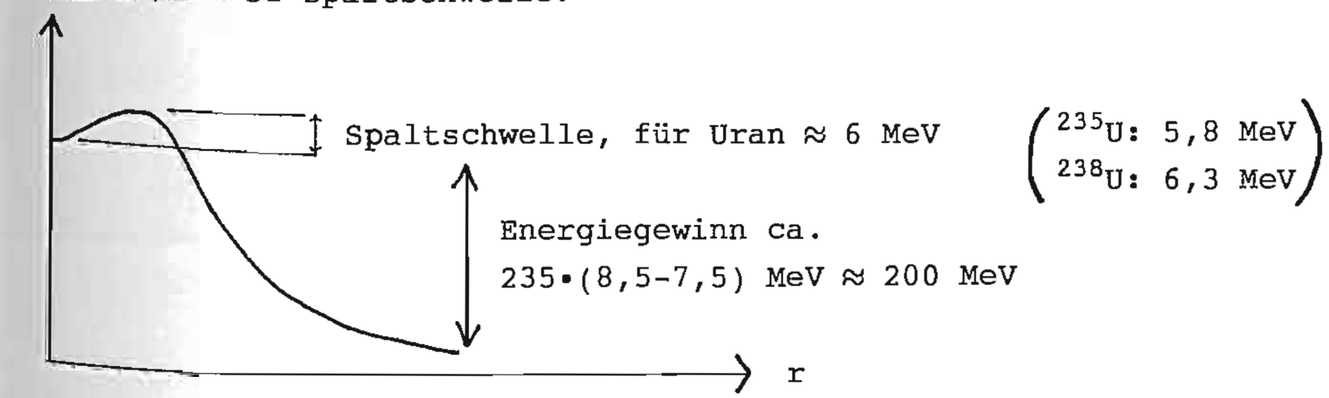



Coulombenergie $B_3 \to B_3(1 - \frac{1}{5}\epsilon)^2$ nimmt ab

Oberflächenenergie $B_2 \to B_2(1 + \frac{2}{5}\epsilon)^2$ nimmt zu

Stabilitätsbedingung gegenüber spontaner Spaltung: größere Zunahme der Oberflächenenergie als Abnahme der Coulombenergie.
Rechnung: $Z^2/A \lesssim 51$

Für $Z^2/A \lesssim 51$ Spaltschwelle:




Neutroneninduzierte Spaltung bei Uran durch freiwerdende Bindungsenergie bei Neutroneneinfang.
Für thermische Neutronen ist diese Bindungsenergie

bei ${}^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U + 6{,}4$ MeV $\quad (g, u) \underset{n}{\rightarrow} (g, g)$

bei ${}^{238}U + n \rightarrow {}^{239}U + 4{,}8$ MeV $\quad (g, g) \underset{n}{\rightarrow} (g, u)$

Die fehlende Paarungsenergie bei ${}^{239}U$ bedingt die niedrigere Bindungsenergie, so daß bei ${}^{238}U$ der Einbau thermischer Neutronen nicht zur Überwindung der Spaltschwelle ausreicht.

Allgemein Spaltprozeß:
$${}^{235}U + n \text{ (thermisch)} \rightarrow {}^{236}U \rightarrow X + Y + k \bullet n \text{ (schnell} \approx 1 \text{ MeV, } k \simeq 2{,}5)$$

Spaltbruchstücke X und Y instabil wegen Neutronenüberschuß, $\beta^-$-Zerfall, z.B.

$$\begin{array}{lcccc}
{}^{235}_{92}U + n \rightarrow & {}^{90}_{36}Kr & + & {}^{143}_{56}Ba & + \; 3n \\
 & \downarrow 32s & & \downarrow 20s & \\
 & {}^{90}_{37}Rb & + & {}^{143}_{57}La & \\
 & \downarrow 2min & & \downarrow 14min & \\
 & {}^{90}_{38}Sr & + & {}^{143}_{58}Ce & \\
 & \downarrow 28a & & \downarrow 33h & \\
 & {}^{90}_{39}Y & + & {}^{143}_{59}Pr & \\
 & \downarrow 64h & & \downarrow 13d & \\
 & {}^{90}_{40}Zr & + & {}^{143}_{60}Nd &
\end{array}$$

Grobe Abschätzung für ${}^{235}U$-Verbrauch:

$$1\text{kg } {}^{235}U\text{: } E = N \bullet \Delta E \simeq \frac{1000}{235} \bullet 6 \bullet 10^{23} \underbrace{\bullet 2 \bullet 10^{8} \bullet 1{,}6 \bullet 10^{-19}}_{200 \text{ MeV}} \text{Ws}$$
$$\simeq 8 \bullet 10^{13} \text{ Ws}$$
$$\simeq 10^{3} \text{ MWd}$$



Fusion

Bei sehr leichten Kernen Durchtunneln des Coulombwalls oberhalb von 1 keV $\simeq 1{,}2 \bullet 10^{7}$ K möglich (z.B. Sonneninnere mit $T \simeq 1{,}5 \bullet 10^{7}$ K und $\rho \simeq 10^{5}$ kg/m$^{3}$).
Kontrollierte Fusion mit Deuterium und Trithium

$$d + {}^{3}H \rightarrow \underset{3MeV}{{}^{4}He} + \underset{14MeV}{n} + 17{,}6 \text{ MeV}$$

$$(n + {}^{7}Li \rightarrow {}^{4}He + \underset{t_{1/2} \simeq 12a}{{}^{3}H} + n - 2{,}5 \text{ MeV})$$

## 5. Kerndrehimpulse und elektromagnetische Kernmomente

Der Kerndrehimpuls $\vec{I}$ setzt sich aus den Bahndrehimpulsen $\vec{l}_i$ und Spins $\vec{s}_i$ der einzelnen Nukleonen zusammen. $\vec{I} = \Sigma\, \vec{l}_i + \vec{s}_i$. Bahndrehimpulse $\vec{l}_i$ als Erhaltungsgrößen setzen ein Zentralpotential $V = V(r)$ voraus, in dem sich die Nukleonen praktisch frei und ohne Stöße im Kerninneren bewegen. Diese Einteilchenvorstellung, welche die Basis des Schalenmodells (Kap. 7) ist, hat ihre Begründung darin, daß die Nukleonen als Fermionen im Grundzustand alle nach dem Pauli-Prinzip erlaubten Zustände besetzen, so daß es keine "Stöße" gibt und die Nukleonen quasi als freie Teilchen auftreten.

a) Bahndrehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

Operatorenzuordnung $p \rightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$, Separation der Wellenfunktionen $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)$ in Radial- und Winkelteil. Die sphärischen Kugelfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sind die Eigenfunktionen von $\vec{l}^2$ und $l_z$ mit den Eigenwerten $l(l+1)\hbar^2$ und $m \cdot \hbar$.

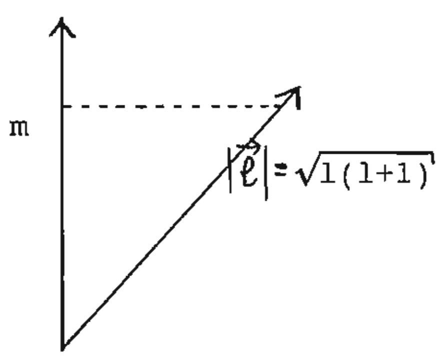
$\vec{l}^2\, Y_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2 \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$ $\quad l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

s, p, d, f, g spektr. Bezeichnung

$l_z\, Y_{lm}(\theta,\varphi) = m \cdot \hbar \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$ $\quad m = -l, \ldots 0, \ldots +l$

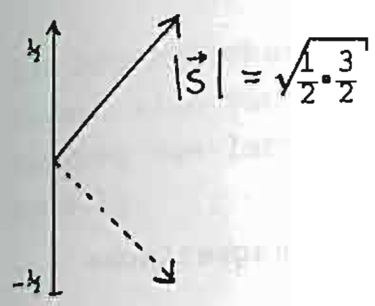
$\Rightarrow$ 2l+1 Einstellmöglichkeiten

'Vektor'-Modell



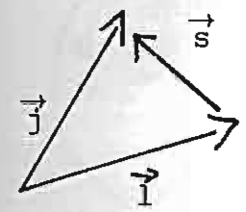



b) Spin $\vec{s}$, $s = \frac{1}{2}$




Ergebnis der relat. Quantenmechanik (Diractheorie). Halbzahlige Spin-Teilchen (z.B. n, p, e,...) sind Fermionen, deren Wellenfunktionen bei Teilchentausch sich antisymmetrisch verhalten (Pauli-Prinzip). Im Gegensatz dazu sind ganzteilige Spin-Teilchen (einschließlich s = 0) Bosonen, (z.B. d, $\alpha$, Photonen, Pionen) mit bei Teilchentausch symmetrischen Wellenfunktionen. Unterschiedliche Statistik.

c) Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ eines einzelnen Nukleons




$j = l \pm \frac{1}{2}$ "parallel" oder "antiparallel"

Bei mehreren Nukleonen gibt es verschiedene Kopplungsmöglichkeiten, wie beispielsweise in der Atomphysik die LS-Kopplung mit $\vec{L} = \Sigma\vec{l}_i \quad \vec{S} = \Sigma\vec{s}_i \quad \vec{L} + \vec{S} = \vec{I}$ oder die jj-Kopplung mit $\vec{l}_i + \vec{s}_i = \vec{j}_i$, $\Sigma\vec{j} = \vec{I}$.

Experimentelle Ergebnisse für die Kerndrehimpulse I:

(g, g) $I = 0$ (im Grundzustand)

(u, g), (g, u) $I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

(u, u) $= 0, 1, 2, 3, \ldots$

Neigung der Protonen und Neutronen, sich jeweils paarweise durch "Antiparallelstellung" der Einzeldrehimpulse mit $\vec{j}_{p_i} + \vec{j}_{p_k} = 0$ bzw. $\vec{j}_{n_i} + \vec{j}_{n_k} = 0$ zu kompensieren.

Folgerung für (u, g)- und (g, u)-Kerne

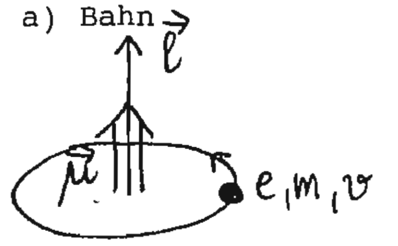
$\vec{I}(u, g) = \underbrace{\vec{I}(g, g\text{-Rumpf})}_{= 0} + \vec{j}_p \curvearrowright I(u, g) = j_p$

d.h. $I(u, g)$ = Einzeldrehimpuls $j_p$ des letzten ungepaarten Protons. Entsprechend $I(g, u) = j_n$ Einzeldrehimpuls des letzten ungepaarten Neutrons.

Magnetisches Kerndipolmoment $\mu_I$

Mit dem Bahndrehimpuls und Spin der Nukleonen sind magnetische Dipolmomente verbunden.

a) Bahn




$$\text{magn. Dipolmoment} = \frac{1}{c}\cdot\text{Strom}\cdot\text{Fläche} = \frac{1}{c}\cdot\frac{e\cdot v}{2\pi r}\cdot\pi r^2 = \frac{e\hbar}{2mc}\cdot l \qquad (\hbar l = mrv)$$

$$\vec{\mu}_l = \frac{e\hbar}{2mc}\cdot\vec{l}$$

$m = m_0$ Elektron $\frac{|e|\hbar}{2m_0c} = \mu_B = 0.927\cdot10^{-23}$ J/T  Bohrsches Magneton

$m = m_p$ Proton $\frac{e\hbar}{2m_pc} = \mu_K = 0.505\cdot10^{-26}$ J/T  Kernmagneton

b) Spin

Für $s = \frac{1}{2}$-Teilchen erwartet man in Analogie zum Bahnbeitrag
$\vec{\mu}_s = \frac{e\hbar}{2mc}\vec{s}$, $s = \frac{1}{2}$  Falsch!

Experimentell gilt allgemein
$\vec{\mu}_s = g\cdot\frac{e\hbar}{2mc}\vec{s}$,  g-Faktor

Dabei ist für das Elektron $g = -2$ nach der Diractheorie bis auf kleinere quantenelektrodynamische Korrekturen bestätigt. Für Proton und Neutron erwartet man deshalb $g_p = 2$ und $g_n = 0$ (wegen fehlender Ladung). Die gemessenen Werte $g_p = 5{,}586$ und $g_n = -3{,}826$

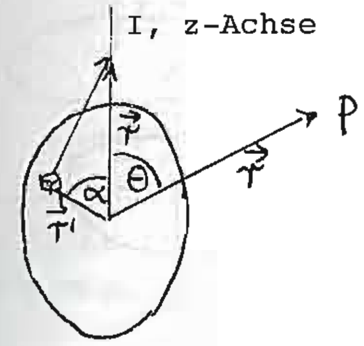


zeigen jedoch, daß die Nukleonen keine einfachen "Punkt-Teilchen" sind.

Die magnetischen Kerndipolmomente $\mu_I$ für (g, u)- und (u,g)-Kerne lassen sich (zumindest für leichte Kerne) näherungsweise auf den Beitrag des letzten ungepaarten Nukleons zurückführen (Schmidt-Modell).

Elektrisches Kernquadrupolmoment Q

Q gibt Abweichung von der Kugelgestalt wieder




Potential $\phi$ für p im Außenraum $\Delta\phi = 0$

$$\phi(r, \Theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\cdot a_n\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot P_n(\cos\Theta)$$

Legendre Polynome $P_0 = 1$

$P_n(\Theta = 0) = 1$  $P_1 = \cos\Theta$

$P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\Theta$

Die Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten $a_n$ erkennt man durch direkte Berechnung des Potentials auf der z-Achse, also für $\Theta = 0$ und Koeffizientenvergleich:

$$\phi(r, \Theta = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot 1$$

oder direkt berechnet

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r')d\tau}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}\cdot P_n(\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho(\vec{r}')\cdot r'^n}{r^{n+1}}\cdot P_n(\cos\alpha)d\tau$$

$$\curvearrowright \quad a_n = \int\rho(\vec{r}')r'^n\cdot P_n(\cos\alpha)d\tau$$

$n = 0$  $a_0 = \int\rho(\vec{r}')d\tau = Ze$  Punktladung

$n = 1$  $a_1 = \int\rho(\vec{r}')\cdot\underbrace{r'\cdot\cos\alpha}_{z}\,d\tau$ = el. Dipolmoment in z-Richtung $\equiv 0$, da Kernkräfte die Parität erhalten

$$n = 2 \qquad a_2 = \int \rho(\vec{r}\,')\cdot r'^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\alpha\right)d\tau$$

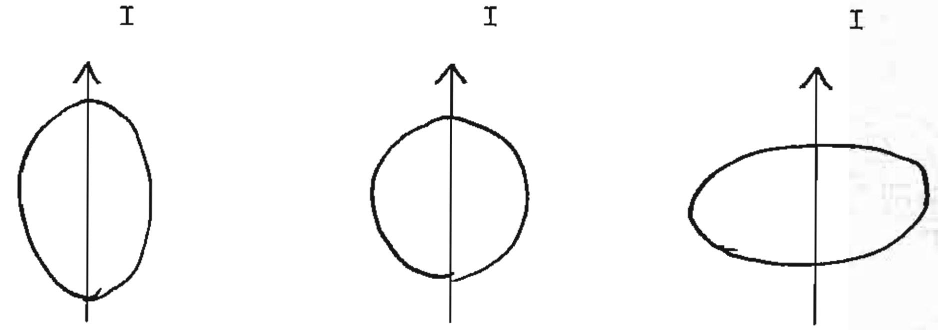
$$= \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r}\,')(3z^2 - r'^2)d\tau$$

$$\text{def} = \frac{1}{2}\, e\, Q$$

Bei konstanter Ladungsverteilung $\rho = \frac{Ze}{V}$ ist deshalb $Q = \frac{Z}{V}\int(3z^2 - r'^2)d\tau$

Größenordnung: $Q \approx \pi R^2 \approx 10^{-28}\ m^2$ (1b)

Vorzeichen:




$Q > 0$ Zigarre

$Q = 0$ Kugel $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \frac{1}{3}\bar{r}^2$

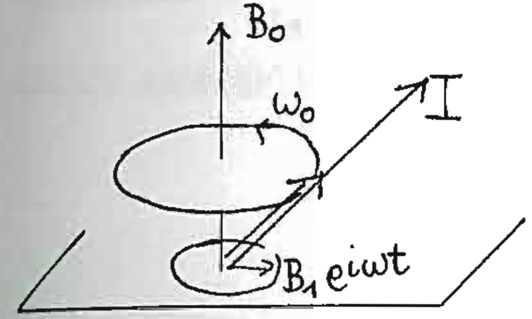
$Q < 0$ Pfannkuchen



## 6. Messung von Kernmomenten

Die Messung von Kernmomenten geschieht durch die Messung von Energieaufspaltungen, die durch die Wechselwirkung der Kernmomente mit äußeren oder inneratomaren elektromagnetischen Feldern verursacht werden.

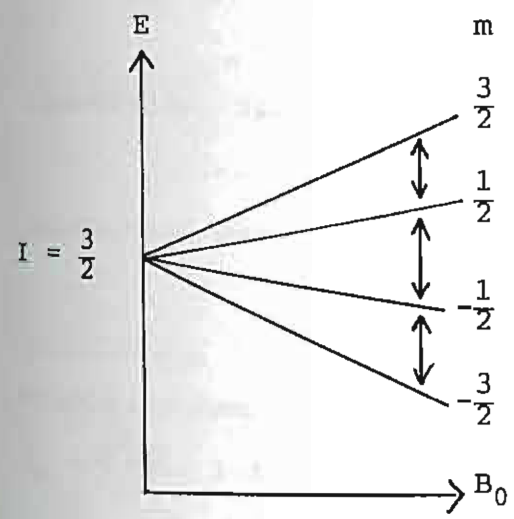
a) äußere Felder: Kernspinresonanzmethode




Larmorpräzession $\hbar\omega_0 = (\vec{\mu}_I \vec{B}_0)$

Größenordnung $\nu_0 = \omega_0/2\pi = \mu_K B/h$
$= 7{,}6\ \mathrm{MHz}\cdot B[T]$

Zusätzliches zirkulares Wechselfeld $B_1\cdot e^{i\omega t} \perp B_0$ induziert Übergänge für $\omega \simeq \omega_0$.




induzierte Absorption und Emission:

Netto-Energieübertrag nur bei unterschiedlicher Besetzung der Zeeman-Niveaus durch Boltzmann-Verteilung im Festkörper. Boltzmann-Faktor $N_1/N_2 = \exp(-\Delta E/kT) \simeq 1 - \Delta E/kT$ für $\Delta E/kT \ll 1$

Größenordnung z.B. $\mu_I \simeq \mu_K$, $B_0 = 1$ T, $T = 300$ K;

$$\Delta E/kT = \mu_K B_0/kT = \frac{5\cdot 10^{-27} J}{1{,}3\cdot 10^{-23}\cdot 300 J} \simeq 10^{-6}$$

b) inneratomare Felder der Hüllenelektronen: Hyperfeinstrukturaufspaltung durch Kopplung von Hüllendrehimpuls $\vec{J}$ und Kernspin $\vec{I}$ zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$

1. magnetische HFS

$$\mathcal{H} = (\vec{\mu}_I\cdot\vec{B}) = \frac{\mu_I\cdot B}{I\cdot J}\cdot(\vec{I}\cdot\vec{J}) = A\cdot\tfrac{1}{2}(\vec{F}^2 - \vec{I}^2 - \vec{J}^2)$$

$E_F = A \cdot \frac{1}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]$

Größenordnung inneratomarer B-Felder der Valenzelektronen etwa B = 1 - 100 T, z.B. H 1s(17 T), K 4s(63 T), Cs 6s(210 T), damit HFS-Aufspaltung im Bereich von MHz - GHz.

2. elektrische HFS

Wechselwirkung des elektrischen Kernquadrupolmoments eQ mit dem elektrischen Feldgradienten $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{r^3}$ der Hüllenelektronen (WW von Tensoren 2. Stufe)

Größenordnung $E \simeq eQ \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^3}$ mit $r^{-3} \approx a_0^{-3}$, $Q \approx R^2$

$$\simeq \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a_0}}_{27{,}2\ \mathrm{eV}} \cdot \underbrace{\left(\frac{R}{a_0}\right)^2}_{10^{-8}}$$

Da 1 eV $\hat{=}$ 2,4 • $10^{14}$ Hz $\curvearrowright$ E $\simeq$ MHz - GHz

---

Messung der HFS-Aufspaltung durch optische Methoden (z.B. dopplerfreie Laserspektroskopie, Doppelresonanz, Level-Crossing, Rabi-Atomstrahlresonanzmethode, Mößbauereffekt, etc.)

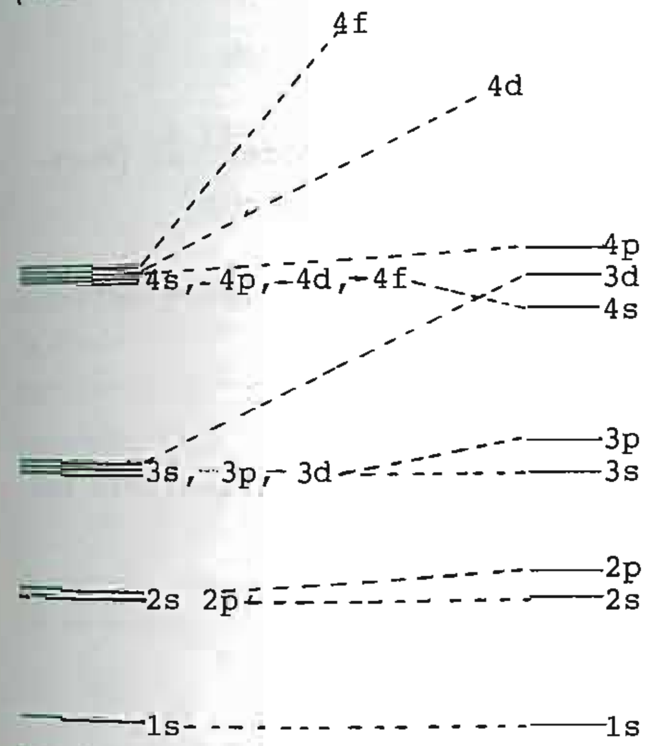


## 7. Das Schalenmodell des Kerns

Ausgangspunkt: Das Auftreten besonders stabiler Nukleonenkonfigurationen mit charakteristischen Sprüngen in der Separationsenergie bei den sogenannten magischen Zahlen N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (N) in großer Ähnlichkeit mit den Edelgaskonfigurationen der Atomhülle. Deshalb als Wiederholung:

Atomhülle:

(nicht maßstäblich!)




| max. Besetzungszahl 2(2l+1) | Σ | |
|---|---|---|
| 6 | | |
| 10 | 36 | Kr |
| 2 | | |
| 6 | 18 | Ar |
| 2 | | |
| 6 | 10 | Ne |
| 2 | | |
| 2 | 2 | He |

Einelektronenproblem:

$E_n = \frac{Z^2 R_y}{n^2}$, l-Entartung

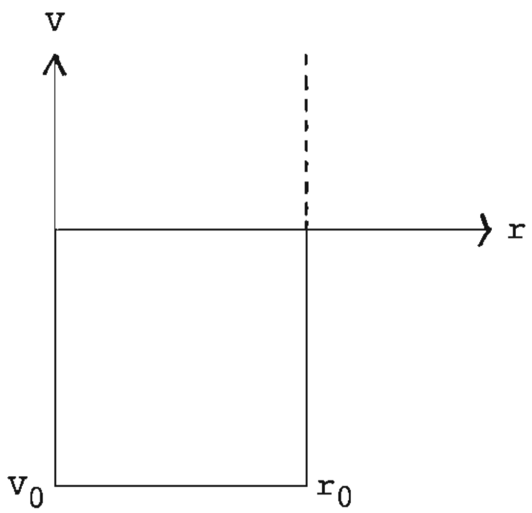
Mehrelektronenproblem:

$$\mathcal{H} = \sum_i (P_i^2/2m \underbrace{- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r_i}) + \sum_{i,k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{ik}}}_{V(r_i)}$$

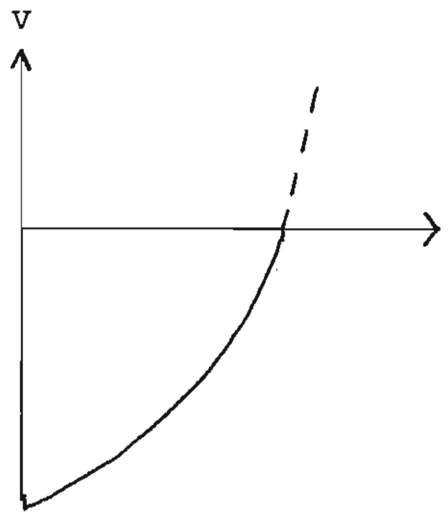
Zentralfeldnäherung $V(r_i)$

Aufhebung der l-Entartung, d-Elektronen (Übergangsmetalle) und f-Elektronen (Lanthaniden, Aktiniden) werden "zu spät" eingebaut. Schalenabschlüsse bei den Edelgasen z = 2, 10, 18, 36, 54, 86 als den "magischen" Zahlen der Atomhülle.

Aufgabe für die Kernphysik: Ein Zentralpotential so zu wählen, daß bei den Schalenabschlüssen die magischen Zahlen erscheinen. Wegen rechnerischer Einfachheit werden oft das Kastenpotential oder das Oszillatorpotential benutzt.




Kastenpotential ($V_0$, $r_0$)




Oszillatorpotential (abgeschnitten) $V \sim r^2$

Da es zunächst nur auf die relative Reihenfolge der Energieniveaus ankommt, kann man die Potentiale nach $\infty$ fortsetzen.

Ergebnis z.B. für das Oszillatorpotential:
äquidistante Abstände der Energieniveaus mit l-Entartung, die bei dem "abgeschnittenen" Potential aufgehoben wird

| | max. Besetzungszahlen | $\Sigma$ |
|---|---|---|
| 3s, 2d, 1g | 2, 10, 18 | 70 |
| 2p, 1f | 6, 14 | 40 |
| 2s, 1d | 2, 10 | 20 |
| 1p | 6 | 8 |
| 1s | 2 | 2 |

Ebenso wie hier werden auch beim Kastenpotential und selbst für realistische Potentialformen wie das Wood-Saxon-Potential nur die ersten drei magischen Zahlen als Schalenabschlüsse erreicht.



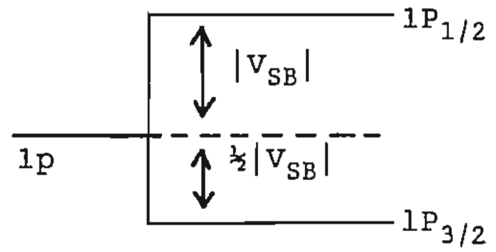
Lösung: Zusätzliche (starke) Spin-Bahn-Kopplung

| | |
|---|---|
| Goeppert-Mayer | Phys. Rev. 75, 1969 (49) |
| Haxel, Jensen, Suess | Phys. Rev. 75, 1966 (49) |

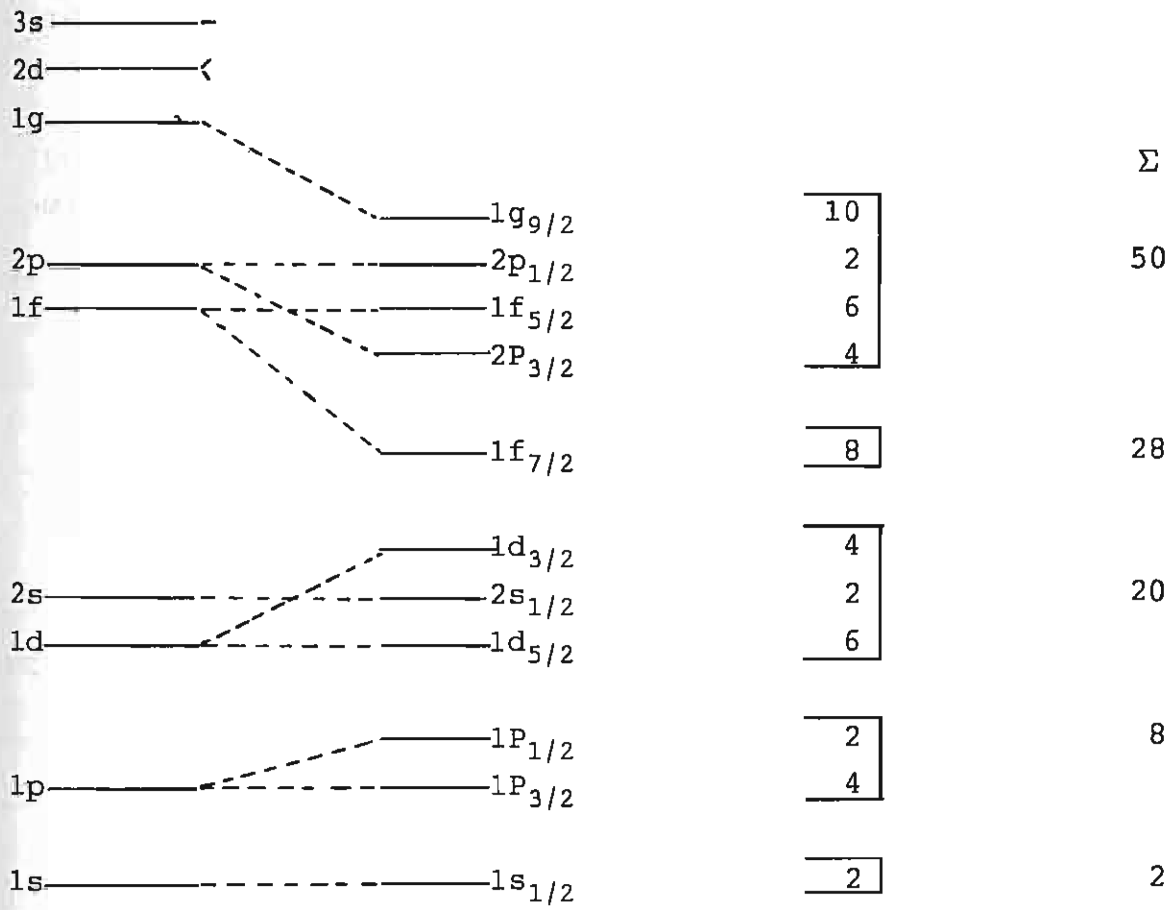
$V = V(r) + V_{SB} \bullet (\vec{l}\bullet\vec{s})$ $\quad |V_{SB}| \approx 1 - 2$ MeV
$V_{SB} < 0$ attraktiv

Dublettaufspaltung:

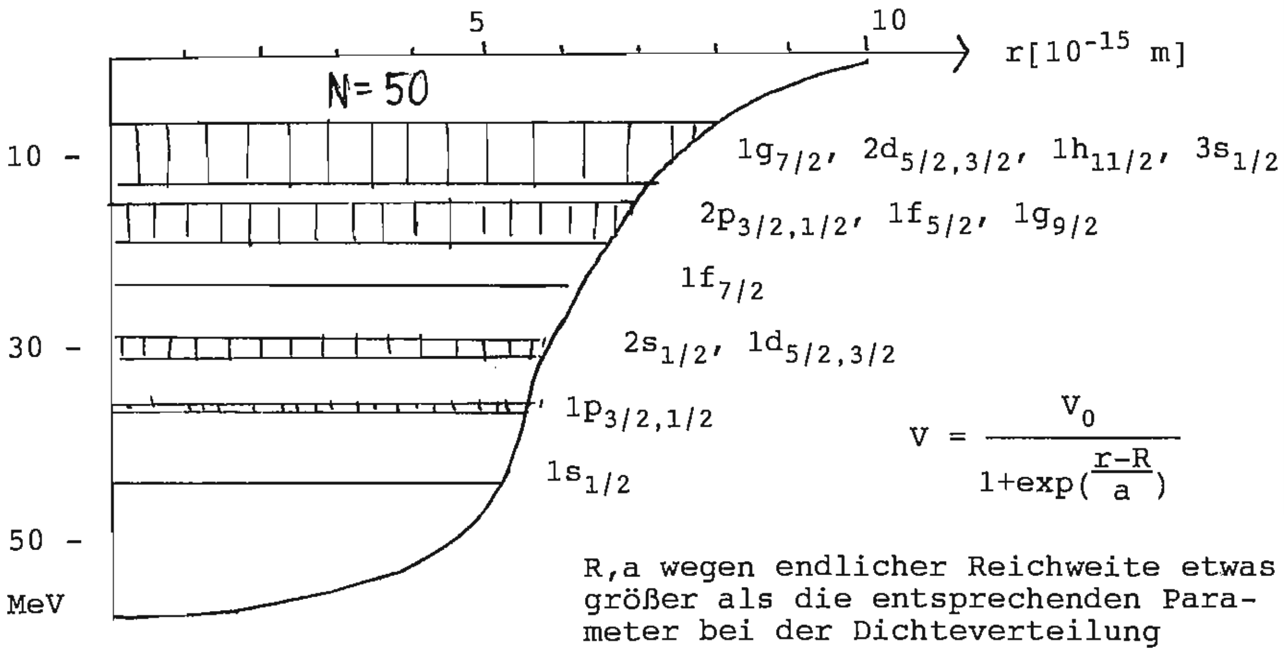
$$(\vec{l}\bullet\vec{s}) = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\, l \text{ für } j = l + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}(l+1) \text{ für } j = l - \frac{1}{2}$$




Die Aufspaltung wächst mit l, solange $V_{SB}$ keine große Abhängigkeit von l zeigt.

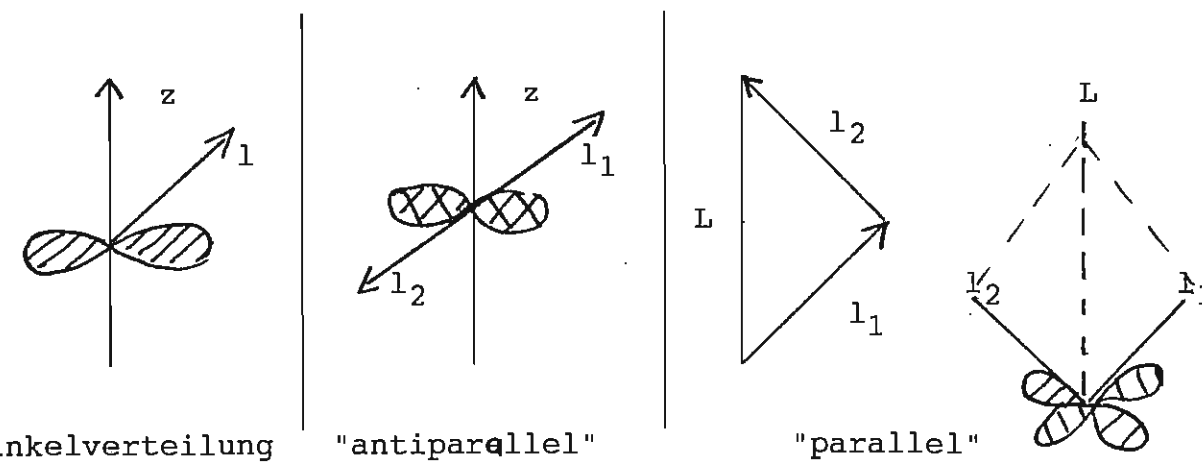



$V(r) + V_{SB} \bullet (\vec{l}\bullet\vec{s})$




Verbesserungen des reinen Schalenmodells

Hinzunahme der Paarungskraft (bei Weizsäckerformel phänomenologisch als Paarungsterm $\delta \approx 1 - 2$ MeV eingeführt) als (kurzreichweitige) Teil der "Restwechselwirkung", die das Bestreben hat, einen möglichst guten Überlapp der Nukleonenwellenfunktionen zu erzielen. Dies gelingt besonders gut durch "Antiparallelstellung" der Einzeldrehimpulse und bewirkt den verschwindenden Kerndrehimpuls I = 0 aller (g, g)-Kerne im Grundzustand.




Winkelverteilung für l

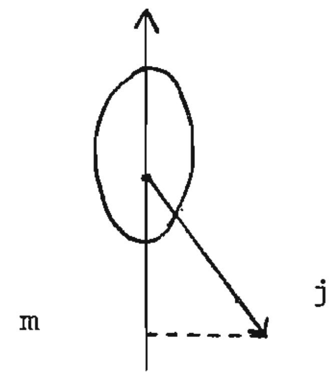
"antiparallel" $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = 0$ guter Überlapp

"parallel" $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ mit $L = l_1 + l_2$. schlechter Überlapp



Damit wird für (u, g)- und (g, u)-Kerne der Kerndrehimpuls I = j des letzten ungepaarten Nukleons. Diese Regel stimmt für (fast) alle (u, g)- und (g, u)-Kerne, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, daß die Paarungskraft die Reihenfolge innerhalb einer Schale verändern kann, indem sie besonders große Einzeldrehimpulse j möglichst paarweise absättigt, so daß hohe Gesamtdrehimpulse I nicht so häufig vorkommen.

Eine weitere Verbesserung ist für Kerne zwischen den magischen Zahlen mit großen Quadrupolmomenten (z.B. im Bereich der Seltenen Erden) die Verwendung eines 'deformierten' Potentials $V = V(r, \Theta)$ [Nilsson-Modell].




Für das deformierte Potential ist der Bahndrehimpuls $\vec{l}$ und damit auch $\vec{j}=\vec{l}+\vec{s}$ keine Konstante der Bewegung mehr. Nur die Projektion m auf die Symmetrieachse bleibt konstant, wobei es zu einer Energieaufspaltung bezüglich der verschiedenen m kommt, je nachdem die "Bahn" l mehr oder weniger lang im Bereich des anziehenden Potentials verläuft.

Für angeregte Kernzustände ist die Einteilchenvorstellung eines "Valenznukleons" nur sehr bedingt verwendbar. Am besten geht es noch ganz in der Nähe der magischen Zahlen,

z.B. bei $^{209}_{82}Pb \triangleq$ "$^{208}_{92}Pb$" + $(2g_{9/2})$- Valenzneutron.
doppeltmagischer Rumpf

Besonders zwischen den magischen Zahlen treten Anregungsspektren auf, die sehr viel besser durch kollektive Nukleonenbewegungen, z.B. durch Rotations- und Vibrationszustände - ähnlich wie bei Molekülspektren - beschrieben werden können. Im Gegensatz zu den Molekülspektren sind die Verhältnisse jedoch weitaus komplizierter, da die Trennung in Einteilchenzustände, Vibrationen und Rotationen keine gute Näherung darstellt, da die Bedingung E (Einteilchen) » E (Vibration) » E (Rotation) im Kern nur sehr schlecht erfüllt ist.

## 8. Kernkräfte

Wegen $B/A \simeq$ const. $\rightsquigarrow$ Kräfte immer nur zwischen zwei Nukleonen. Einfachste Modellsysteme: a) das Deuteron und b) n-p Streuung

a) Deuteron als einfachstes gebundenes Nukleonensystem mit folgenden Eigenschaften

1) Bindungsenergie $n + p \rightarrow d + 2{,}2$ MeV
2) Kernspin $I = 1$, magn. Kerndipolmoment $\mu_I = 0{,}857\ldots\ \mu_K$ ($\mu_I \simeq \mu_p + \mu_n = 0{,}879\ldots\ \mu_K \rightsquigarrow \vec{I} = \vec{\tfrac{1}{2}} + \vec{\tfrac{1}{2}}$, ${}^3S_1$-Zustand) el. Quadrupolmoment $Q = +2{,}86\cdot10^{-31}\ m^2 = 2{,}7$ mb, d.h. sehr klein
3) es existiert kein angeregter Zustand, außerdem gibt es kein Diproton oder Dineutron.

Reduktion des Zweikörperproblems durch Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_n$ und red. Masse $\mu = \frac{m_p \cdot m_n}{m_p + m_n} \simeq \frac{1}{2} m_p$.

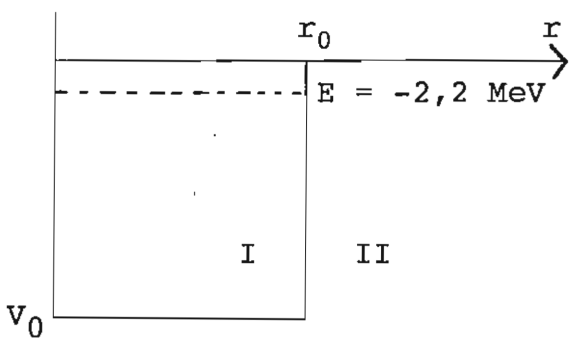
Schrödingergleichung $[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V]\,\Psi = E\Psi$

Problem $E = -2{,}2$ MeV bekannt, V unbekannt. Annahme: $V = V(r)$ Zentralpotential. Separationsansatz von Radial- und Winkelteil $\Psi_{nlm} = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\Theta, \varphi)$

Radialteil $$[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}_{\text{Zentrifugalpotential}}](r\cdot R_{nl}) = E_{nl}\cdot(rR_{nl})$$

Zentrifugalpotential abstoßend $\rightsquigarrow$ Grundzustand $l = 0$ (wird durch $I = 1$ und $\mu_I \simeq \mu_n + \mu_p$ unterstützt). $(rR_{nl}) = (rR_{10}) = u$

Erste (grobe) Annahme von $V(r)$: Kastenpotential $(V_0, r_0)$




Trennung der Radialgleichung in Innen (I)- und Außen (II)-Bereich



I $\quad r \le r_0 \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V_0)\cdot u = 0 \qquad K = \sqrt{\frac{2\mu(E-V_0)}{\hbar^2}}$

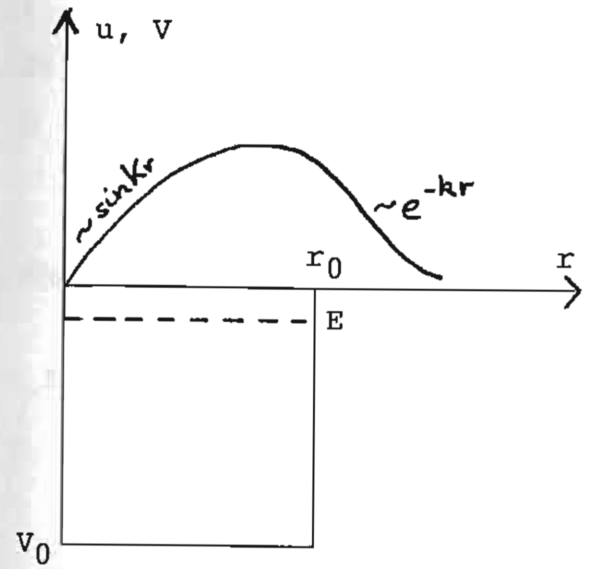
Lösung $\quad u = A\cdot\sin Kr + C\cdot\cos Kr = A\cdot\sin Kr$

RB: $u = 0$ für $r \rightarrow 0$ wegen $u/r$ endlich $C = 0$

II $\quad r \le r_0 \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}E\cdot u = 0 \qquad k = \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} = [4{,}3\cdot10^{-15} m]^{-1}$

Lösung $\quad u = B'\cdot e^{-kr} + De^{kr} = Be^{-k(r-r_0)}$

RB: $u \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ $\rightsquigarrow D = 0$




Stetiger Anschluß von u und $\frac{du}{dr}$ bei $r = r_0$:

$$A\cdot\sin Kr_0 = B$$
$$K\cdot A\cdot\cos Kr_0 = B\cdot(-k)$$
$$K\cdot\operatorname{ctg} Kr_0 = -k$$

Damit werden die beiden Parameter $(V_0, r_0)$ des Kastenpotentials miteinander verknüpft, z.B. mögliche Wertepaare

$r_0 = 1{,}4\cdot10^{-15}$ m, $\quad 2\cdot10^{-15}$ m
$V_0 = 50$ MeV, $\quad 30$ MeV

Da für $\vec{I} = \vec{\tfrac{1}{2}} + \vec{\tfrac{1}{2}}$ nur $I = 1$ existiert, sind die Kernkräfte spinabhängig, wobei nur das Triplettpotential bindend ist. Erklärt auch die Nichtexistenz von $p^2$ und $n^2$ durch das Pauli-Prinzip.

Ansatz $\quad V = V_1(r) + V_2(r)\cdot(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2) \qquad (\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2) \Rightarrow \frac{1}{2}[S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}]$

Triplett $\quad V_T = V_1(r) + \frac{1}{4}\cdot V_2(r) \qquad S = 1$

Singulett $\quad V_S = V_1(r) - \frac{3}{4}\cdot V_2(r) \qquad S = 0$

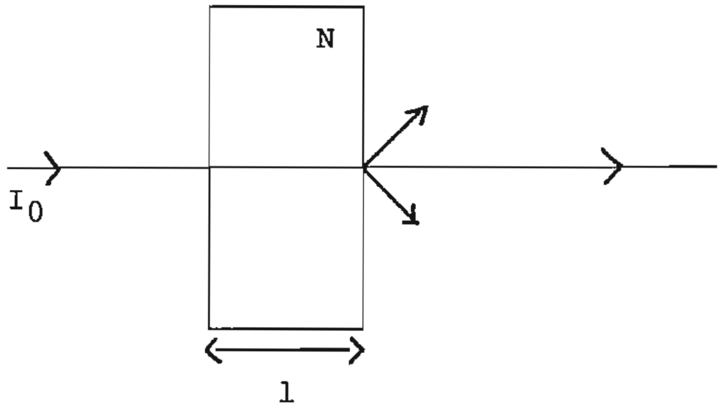
Grobe Abschätzung für Singulett-Potential:
Falls $V_S$ gerade nicht mehr bindend $\rightsquigarrow \sin Kr_0 \simeq 1$ senkrecht auf Potentialwand, so daß man keine abnehmende Exponentialfunktion im Außenraum anfügen kann.
$Kr_0 \le \frac{\pi}{2}$ bedeutet in Zahlenwerten $|V_0|\cdot r_0^2 \lesssim 100$

$V_0$[MeV], $r_0[10^{-15}$ m]

Die Existenz des (sehr kleinen) Quadrupolmoments bedeutet einen sehr kleinen Beitrag einer <u>nichtzentralen</u> Kraft, die eine $^3D_1$-Zumischung ermöglicht.

b) n-p Streuung

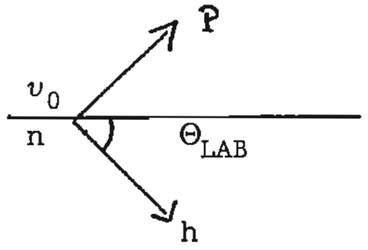
Wirkungsquerschnitt $\sigma[m^2]$



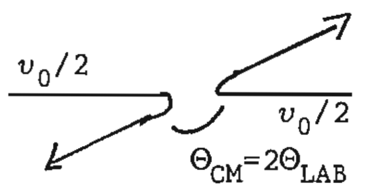

$I = I_0 e^{-\sigma N l}$

$\sigma$ als "Trefferfläche", z.B. $\sigma(\text{geom.}) = \pi R^2 \approx 10^{-29}$-$10^{-28} m^2$ ($10^{-28} m^2$ = 1b). Festkörpertarget $N \approx 10^{22}$ Kerne/cm$^3$; $\approx 10^{28} m^{-3}$, Targetlänge z.B. $l = 10^{-2} m \rightsquigarrow \sigma N l \approx 10^{-3}$-$10^{-2}$, d.h. "dünnes" Target mit $I = I_0(1-\sigma N l)$.

Kinematik: $m_p \simeq m_n$, "Billardproblem"




Laborsystem



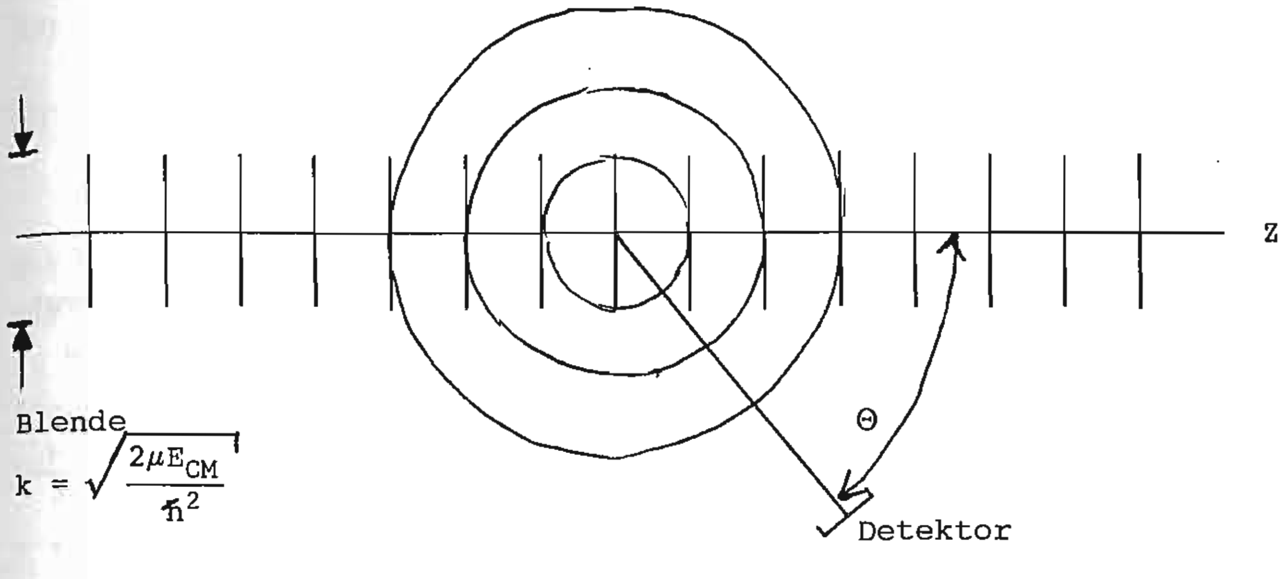

CM-System

elastisch: $v_0/2$ vor und nach dem Stoß. $E_{CM} = \frac{1}{2} E_{LAB}$

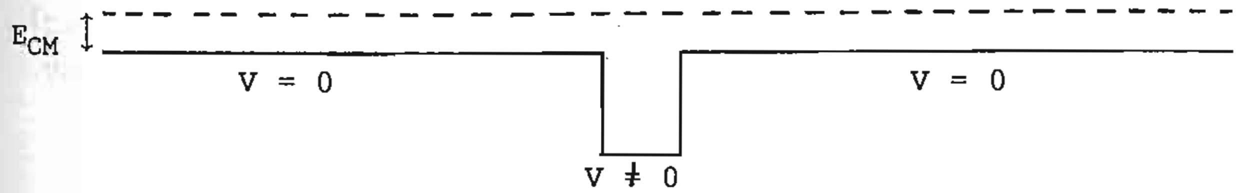
2 → 1 Körperproblem: Stoß zweier Teilchen gleicher Masse im CM-System ist äquivalent dem Stoß eines Teilchens mit reduzierter Masse $\mu = m/2$ und $E = E_{LAB}/2$ an einem festen Streuzentrum bei $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_p \approx 0$.



Quantenmechanische Formulierung des Streuproblems




$k = \sqrt{\frac{2\mu E_{CM}}{\hbar^2}}$




einlaufende ebene Welle $e^{ikz}$ ⟶ nichtgestreute ebene Welle $e^{ikz}$ + gestreute auslaufende Kugelwelle $\frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\Theta)$

differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ in Raumwinkel $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Fluß der gestreuten Teilchen in Raumwinkel } d\Omega \text{ (Detektor)}}{\text{Fluß der einlaufenden Teilchen pro Einheitsfläche}}$$

Fluß der einfallenden Teilchen: $\underbrace{|e^{ikz}|^2}_{1 \text{ Teilchen pro Raumeinheit}} \cdot v$

Fluß der gestreuten Teilchen in $d\Omega$: $|\frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\Theta)|^2 \cdot r^2 \cdot v \rightsquigarrow$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Theta)|^2$ Quadrat der Streuamplitude $f(\Theta)$

Speziell für isotrope Streuung ($f(\Theta)$ = const.) ist dann der (Gesamt)-Wirkungsquerschnitt $\sigma = 4\pi \cdot |f|^2$.

Berechnung des Wirkungsquerschnitts:

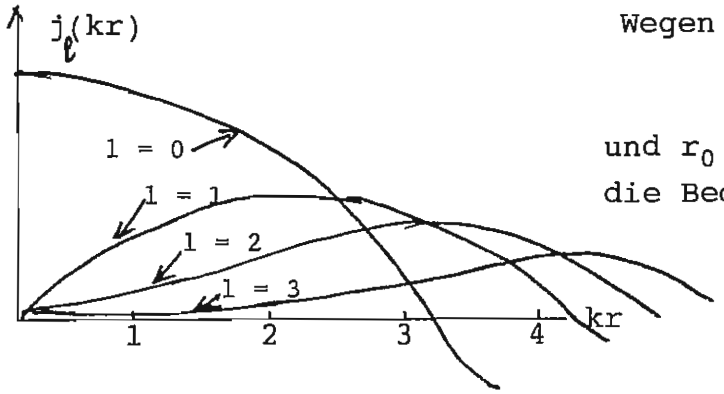
Zunächst Entwicklung der einlaufenden ebenen Welle nach Kugelwellen.

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\Theta} = \sum_l i^l(2l+1)\, j_l(kr)\cdot P_l(\cos\Theta)$$

$j_l(kr)$ sphärische Besselfunktionen

Sinn: Bei niedrigen Energien ($E_n \le 10$ MeV) kann wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte nur der $l = 0$-Anteil (S-Wellen) gestreut werden. Teilchen mit $l \neq 0$ kommen bei diesen Energien nicht nahe genug heran.

Quantitativ:




Wegen $k = \sqrt{\frac{2\mu E_{cm}}{\hbar^2}}$

$= 0{,}15\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}E_{LAB}[\text{MeV}]}\cdot 10^{15}\ \text{m}^{-1}$

und $r_0 \simeq 10^{-15}$ m ist für $E_{LAB} \le$ MeV die Bedingung $kr_0 \le 1$ erfüllt.

Der S-Wellenanteil der einlaufenden ebenen Welle lautet mit $j_0(kr)$:

$$(\text{S-Wellenanteil}) = \frac{\sin kr}{kr} \equiv \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2ikr}$$

auslaufende einlaufende Kugelwelle

Nach dem "Durchlaufen" des Zentralpotentials $V = V(r)$ bleiben der S-Wellencharakter, der Wellenvektor k und die Teilchenzahl erhalten. Deshalb kann es nur eine Phasenänderung in der auslaufenden Kugelwelle geben.

S-Wellenanteil nach Durchlaufen des Streupotentials:

$$\frac{e^{i(kr+2\delta_0)}-e^{ikr}}{2ikr} \equiv e^{i\delta_0}\cdot\frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr}$$

Die Differenz des S-Wellenanteils vor und nach der Streuung charakterisiert die gestreuten Teilchen, also die gestreute auslaufende Kugelwelle $\frac{e^{ikr}}{r}\cdot f(\Theta)$:



$$\frac{e^{i(kr+2\delta_0)}-e^{ikr}}{2ikr} \equiv \frac{e^{i(kr+\delta_0)}}{r}\cdot\frac{\sin\delta_0}{k}$$

Damit gilt für den diff. Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von der Streuphase $\delta_0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Theta)|^2 = \frac{\sin^2\delta_0}{k^2}$$

Berechnung der Streuphase mit einem Kastenpotential $(V_0, r_0)$ über die Schrödingergleichung analog zum Deuteronproblem, jedoch $E > 0$.

Innenbereich I

$$\left[-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V_0\right] u = E\cdot u$$

$u = A_1\cdot\sin Kr$

$K = \sqrt{\frac{2\mu(E-V_0)}{\hbar^2}}$

Außenbereich II

$$\left[-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + 0\right] u = E\cdot u$$

$u = A_2\cdot\sin(kr+\delta_0)$

(siehe $e^{i\delta_0}\cdot\frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr}$ und $\Psi \sim \frac{u}{r}$

$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$

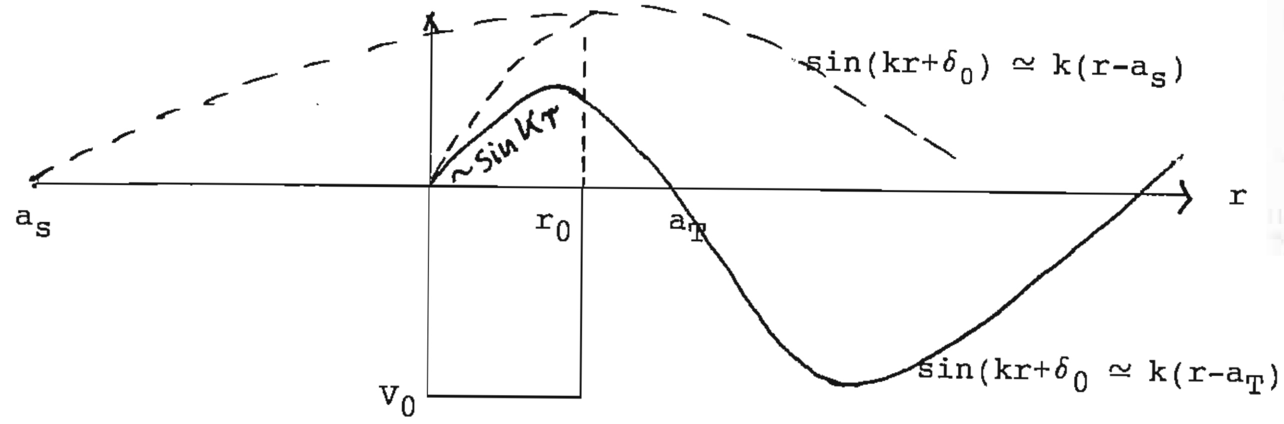
Stetige Anpassung für u und du/dr bei $r = r_0$ ergibt

$$\begin{array}{rcll} A_1\sin Kr_0 & = & A_2\cdot\sin(kr_0+\delta_0) & = A_2k(r_0-a) \\ K\cdot A_1\cos Kr_0 & = & k\cdot A_2\cdot\cos(kr_0+\delta_0) & = A_2k \\ \hline K\cdot\operatorname{ctg} Kr_0 & = & k\operatorname{ctg}(kr_0+\delta_0) & \underbrace{= (r_0-a)^{-1}}_{k \ll K} \end{array}$$

Im niederenergetischen Bereich mit $k \ll K$ kann man die Sinusfunktion im Außenbereich durch eine Gerade ersetzen

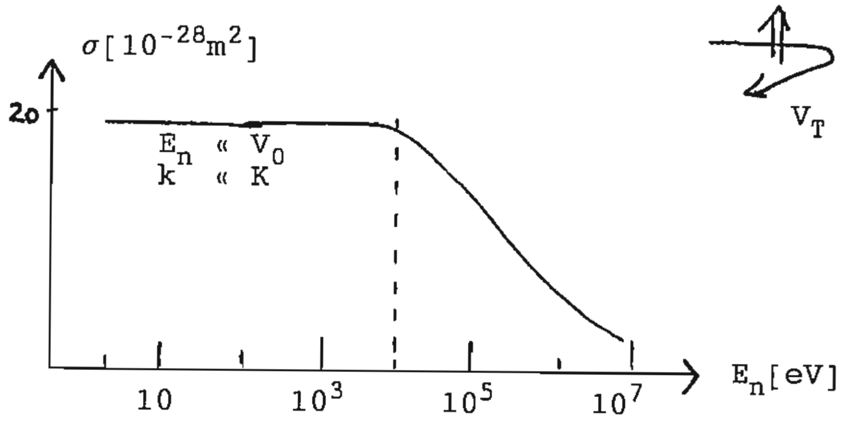
$u \simeq A_2(kr+\delta_0) = A_2k(r-a)$ mit $\delta_0 = -ka$.

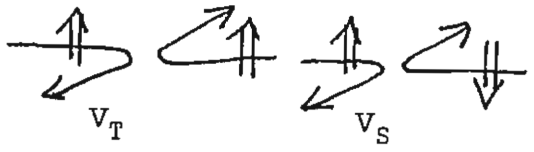
Die sogenannte Streulänge a ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der r-Achse. Je nachdem $(V_0, r_0)$ für $E \approx 0$ bindend oder nichtbindend ist, ist a positiv oder negativ. Sehr große Werte für die Streulänge erhält man, wenn das Potential gerade noch $(V_T)$ oder gerade nicht mehr bindend $(V_S)$ ist.




Wirkungsquerschnitt $\sigma = 4\pi|f(\Theta)|^2 = 4\pi\cdot\frac{\sin^2\delta_0}{k^2} = 4\pi a^2$ unabhängig von E für den Bereich $k \ll K$ mit $\delta_0 = -ka$ und $a = r_0 - \frac{1}{K}\,\mathrm{tg}Kr_0$. In der Streulänge a sind wieder die beiden Parameter des Kastenpotentials ($V_0$, $r_0$) miteinander verknüpft.

Experimentell:




$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_T + \frac{1}{4}\sigma_S$$

Grobe Abschätzung aus Deuteronproblem ergibt für das Triplettpotential $a_T = 5{,}7\cdot10^{-15}$m und damit $\sigma_T \approx 4{,}5\cdot10^{-28}\mathrm{m}^2$. Damit erhält man aus $\sigma \approx 20\cdot10^{-28}\mathrm{m}^2$ für $\sigma_S \simeq 68\cdot10^{-28}\mathrm{m}^2$ und $|a_S| = 23\cdot10^{-28}\mathrm{m}^2$. Das negative Vorzeichen $a_S < 0$ folgt aus Messungen der kohärenten Streuung am Para-Wasserstoff-Molekül.

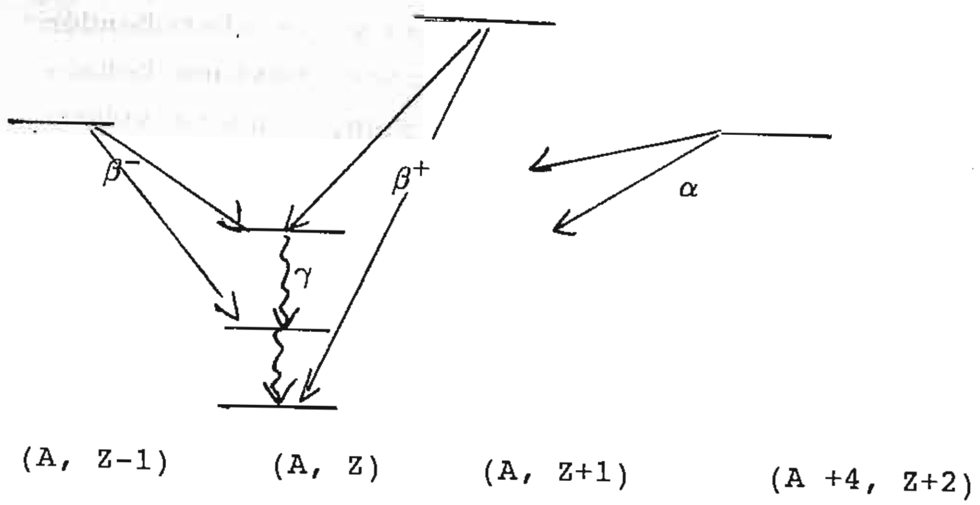
Während der Bereich bis ca. $10^4$ eV vom Singulett-Potential beherrscht wird, tritt für den Bereich $10^4$ - $10^7$ eV immer mehr das Triplett-Potential in den Vordergrund. Ab $10^7$ eV müssen verstärkt höhere Bahndrehimpulsanteile berücksichtigt werden.



Bei einer feldtheoretischen Behandlung in Analogie zur Quantenelektrodynamik versucht man die Kernkräfte durch Mesonen-Austauschprozesse zu beschreiben. Dabei wird der "langreichweitige" Teil durch Ein-Pion-Austauschprozesse (Yukawa-Ansatz 1935) und der Bereich mittlerer Reichweite durch Zwei-Pion-Austauschprozesse beschrieben. Der "kurzreichweitige" Teil mit einem stark abstoßenden Anteil (hard core) muß durch den Austausch mehrerer Mesonen behandelt werden. Dabei spielen nicht nur die $\pi$-Mesonen, sondern schwere Mesonen (z.B. das $\omega$-Meson mit $mc^2 = 783$ MeV) wegen ihrer kleinen Compton-Wellenlänge eine besondere Rolle. Da Nukleonen und Mesonen ihrerseits aus Quarks zusammengesetzt sind, die von Gluonen zusammengehalten werden, muß eine genauere Feldtheorie der Kernkräfte auf diesen Teilchen aufbauen.

## 9. Kernzerfälle, Strahlenschutz

Zerfälle: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, Kernspaltung




Zerfallsgesetz

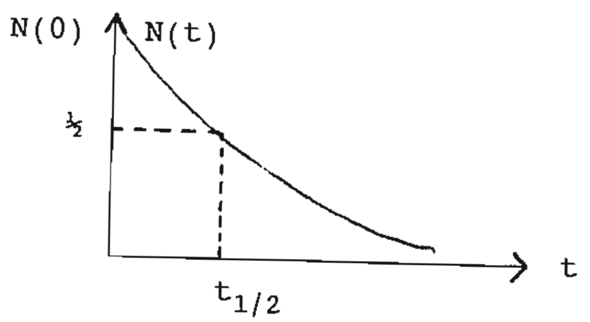
Übergangswahrscheinlichkeit A [$s^{-1}$], Aktivität dN/dt

$dN/dt = -\lambda N \curvearrowright N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$

Halbwertzeit $t_{1/2} = \ln 2/\lambda = 0{,}69/\lambda$

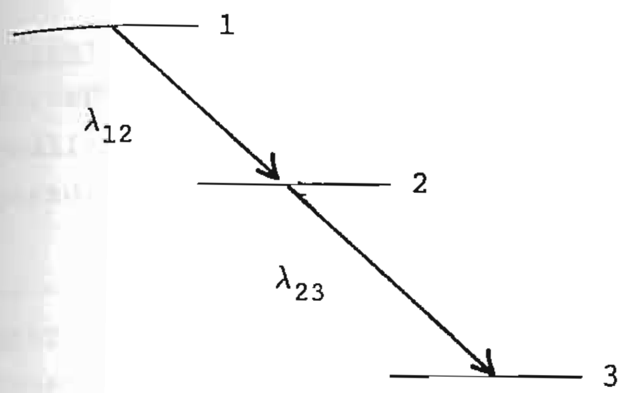
Bei mehreren Zerfallskanälen $\lambda_i$: $\lambda = \Sigma\lambda_i$

z. B. in verschiedene Niveaus des Tochterkerns oder verschiedene konkurrierende Zerfallsarten wie $\beta^+$ und $\beta^-$ und Elektroneneinfang etc.






Zerfallskette




z.B. 1, 2, 3 verschiedene Kerne oder 1 → 2 $\beta$-Zerfall mit anschließendem 2 → 3 $\gamma$-Zerfall

t = 0 $\quad N_1(0)$

t > 0 $\quad N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_{12}t}$

$$dN_2/dt = +\lambda_{12}\, N_1(t) - \lambda_{23} \cdot N_2(t)$$

Zuwachs  Zerfall

Ansatz $N_2(t) = A\, e^{-\lambda_{12}t} + B\, e^{-\lambda_{23}t}$ wegen $N_2(0) = 0$ ist $A = -B$

$$= A(e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda_{23}t})$$

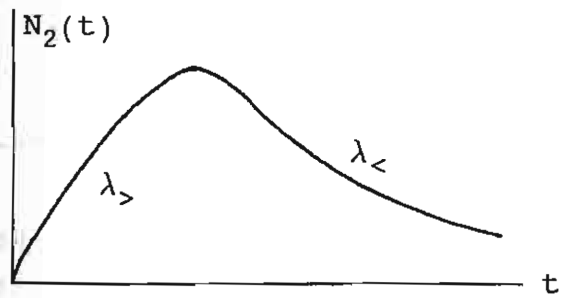
$$dN_2/dt = A(-\lambda_{12}\, e^{-\lambda_{12}t} + \lambda_{23}\, e^{-\lambda_{23}t}$$

$$= \lambda_{12}\, N_1(0)\, e^{-\lambda_{12}t} - \lambda_{23}\, A(e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda_{23}t})$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$-\lambda_{12}\, A = \lambda_{12}\, N_1(0) - \lambda_{23} \cdot A \qquad A = N_1(0) \cdot \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}-\lambda_{12}}$$

Die Aktivität der Substanz $N_2$ ist nicht $dN_2/dt$ wegen des Zuwachses, sondern nur proportional zum Zerfall, also $\sim \lambda_{23} \cdot N_2(t)$




z. B. $\lambda_{12} \gg \lambda_{23}$ kurzlebiger Mutterkern oder $\lambda_{12} \ll \lambda_{23}$ kurzlebiger Tochterkern.
Bei sehr unterschiedlichen Zerfallszeiten bestimmt der schnelle Zerfall den Anstieg, der langsame den Abfall.

Bei einer längeren Zerfallskette mit einer besonders langlebigen Substanz ist nach einiger Zeit die Zerfallsreihe im radioaktiven Gleichgewicht, weil die Aktivitäten aller Substanzen praktisch gleich der Aktivität der langlebigen Substanz sind.

Strahlenschutzeinheiten:

Aktivität $dN/dt$ [$s^{-1}$] = [Bq] Becquerel

früher: 1 Curie = 1 Ci ≙ $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq (1 Ci ≙ 1g Radium)

Aus Aktivitätsangabe und Halbwertzeit ergibt sich die Zahl der radioaktiven Kerne

$|dN/dt| = \lambda \cdot N = N \cdot 0{,}69/t_{1/2}$ $N = |dN/dt| \cdot t_{1/2}/0{,}69$

z. B. 1 Ci $Co^{60}$ mit $t_{1/2} \simeq 5a = 1{,}6 \cdot 10^8 s$

$$Co^{60}\ [g] = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^8 \cdot 60}{0{,}69 \cdot 6 \cdot 10^{23}}\ g \simeq 0{,}8\ mg$$

Ionendosis $dq/dm$ [C/kg]

Die Wirkung bzw. Gefährlichkeit radioaktiver Strahlung ist abhängig von der Zahl der gebildeten Ionen pro Menge abs. Materials.

früher: 1 Roentgen = 1 R = in 1 $cm^3$ Normalluft von $\gamma$-Strahlung erzeugte 1 elektrostatische Ladungseinheit (1 esU)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Umrechnung: } 1\ cm^3 \text{ Normalluft} = 1{,}2\ mg \\ 1\ esU = 3{,}33 \cdot 10^{-10}\ C\end{array}\right\}\ 1\ R \mathrel{\hat{=}} 2{,}6 \cdot 10^{-4}\ C/kg\ \text{(Luft)}$$

Energiedosis $dE/dm$ [J/kg] = [Gy] Gray

Da die zur Erzeugung eines Ionenpaars benötigte mittlere Energie von ca. 30 eV ziemlich materialunabhängig ist, ist die Ionendosis (fast) äquivalent zur Energiedosis.

Umrechnung z. B. für Luft: 1 Ionenpaar = 34 eV

$$1\ R \mathrel{\hat{=}} 2{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 34\ J/kg = 0{,}9 \cdot 10^{-2}\ J/kg$$

materialunabhängige Definition:

früher: 1 rad = $10^{-2}$ J/kg ≙ $10^{-2}$ Gy

Äquivalentdosis $Q \cdot dE/dm$ [J/kg] = [Sv] Sievert

Die biologische Gefährlichkeit hängt z. B. wegen der möglichen Regenerationsfähigkeit von Zellen nicht nur von der Ionen- bzw. Energiedosis ab, sondern wird verschärft, wenn pro Wegstrecke sehr viele Ionen erzeugt werden. Deshalb wird die Energiedosis noch mit einem Q-Faktor multipliziert.

früher: 1 rem = 1 rad·Q 1 rem = $10^{-2}$ Sv

$Q \simeq 1$ für $\beta^{\pm}$ und $\gamma$

$Q \simeq 2$ für thermische n



$Q \simeq 5$-$20$ für $\alpha$, schnelle n, schwere Rückstoßkerne

"Grenzwerte":

Kurzzeitige Ganzkörperbestrahlung (mit $\gamma$-Strahlung) ab ca. 5 Sv tödlich.

Genauer: 0,25 Gefährdungsdosis, 1 Sv kritische Dosis, 4 Sv halbletale, 7 Sv letale Dosis.

---

Mittlere natürliche Strahlenbelastung ≃ 1 mSv/a

Genauer: kosmische (Meereshöhe) ≃ 0,3 mSv/a, terrestrische 0,5 mSv/a, innere (durch $^{40}K$, $^{226}Ra$, $^{220,222}Rn$, ... in Knochen und Lunge) ≃ 0,2 mSv/a

Mittlere künstliche Strahlenbelastung ≃ 0,6 mSv/a durch medizininische Anwendungen (Röntgen)

---

beruflich erlaubt: 50 mSv/a Ganzkörper (≙ 5 rem/a = 2,5 mrem/h)

Genauer: verschiedene Strahlenschutzbereiche, verschiedene Grenzwerte für verschiedene Körperbereiche etc. → Strahlenschutzverordnung

---

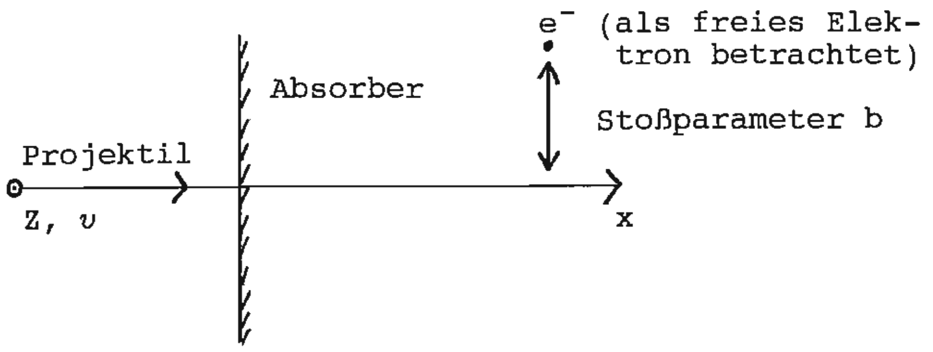
| | | | |
|---|---|---|---|
| Gammastrahlendosiskonstante z. B. | $^{60}Co$ | $3{,}4 \cdot 10^{-13}$ | [Sv $m^2 h^{-1} \cdot Bq^{-1}$] |
| (Punktquelle) | $^{137}Cs$ | $7{,}7 \cdot 10^{-14}$ | [ " ] |

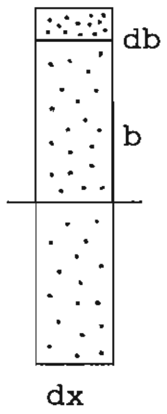
z. B. 1 Ci $^{60}Co$-Quelle in 1 m Abstand: 12 mSv/h

---

## 10. Abschirmung radioaktiver Strahlung

a) Abbremsung geladener Teilchen (Bethe-Bloch-Formel)




Übertragener Impuls (senkrecht zur Flugrichtung) $P_\perp$ = Kraft • Stoßzeit

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{b^2} \cdot \frac{b}{v}$$

Übertragene Energie $E = P^2/2m \approx \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{Z^2e^4}{b^2v^2m}$

Summation über alle Elektronen mit Stoßparameter zwischen b und b + db ergibt Faktor $2\pi$ b db•N (N Dichte der Elektronen, im Festkörper ist N ~ $\rho$).

Intergration über alle Stoßparameter zwischen $b_{max}$ und $b_{min}$ ergibt Energieverlust pro Wegstrecke dx

$$\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{Z^2e^4 \cdot 2\pi \cdot N}{mv^2} \cdot \frac{1}{b}\, db = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{Z^2e^4 2\pi N}{mv^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

Wichtiger Faktor: $\frac{Z^2 \cdot N}{v^2}$

Obere und untere Grenze:

$b_{min} \gtrsim \lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{mv}$ de Broglie Wellenlänge des Elektrons vom Ruhesystem des ion. Teilchens aus gesehen



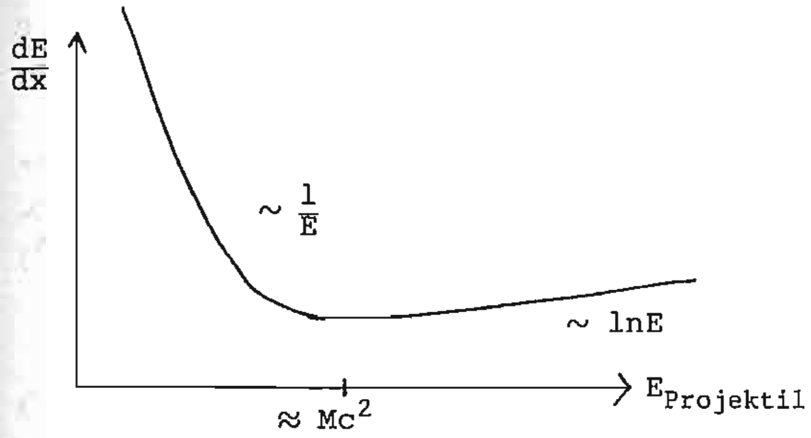
$b_{max}$: Stoßzeit $b_{max}/v$ kleiner als mittlere Umlaufzeit des Atomelektrons, d. h. $b_{max}/v \lesssim 1/\tilde{\nu}$ $\quad b_{max} \le \frac{v}{\tilde{\nu}}$

$\ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \ln \frac{mv^2}{h\tilde{\nu}} \approx \ln \frac{mv^2}{\langle I \rangle}$ $\qquad \langle I \rangle$ mittleres Ionisationspotential

grob: $\langle I \rangle \approx 12$ eV•$Z_{Absorber}$

Genauere Rechnung mit relativistischen Termen (besonders wichtig für ion. Elektronen, da diese schon im MeV-Bereich relat. zu behandeln sind).

Allgemeine Form von dE/dx




Energieverlust von $e^-$, p und $\alpha$ in Luft ($\rho \simeq 1{,}2$ mg/cm$^3$)

| E[eV] | dE/dx[eV/cm] | | |
|---|---|---|---|
| | e | p | α |
| $10^4$ | $2{,}3 \cdot 10^4$ | | |
| $10^5$ | $4{,}4 \cdot 10^3$ | | |
| $10^6$ | $2 \cdot 10^3$ | $3{,}6 \cdot 10^5$ | $5{,}8 \cdot 10^6$ |
| $10^7$ | $2{,}3 \cdot 10^3$ | $5{,}6 \cdot 10^4$ | $9 \cdot 10^5$ |
| $10^8$ | $2{,}9 \cdot 10^3$ | $9{,}1 \cdot 10^3$ | |

Damit Reichweiten

z. B. $E \approx 1$ MeV

| | Luft | Festkörper |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $\approx$ cm | $\leq$ 0,1 mm |
| $\beta$ | $\approx$ m | 0,1-1 cm |

b) <u>Absorption von $\gamma$-Strahlung</u>

Photoeffekt - Compton-Effekt - Paarbildung

Photoeffekt:

$\hbar\omega$ + gebundenes Atomelektron (insbes. die 1s-Elektronen) $\rightarrow$ freies Elektron mit $e = \hbar\omega$-Bindungsenergie des Elektrons

(hohe Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von $Z_{Absorber}$ mit ca. $Z^5$)

Compton-Effekt:

$\hbar\omega + e^-$ (als freies Elektron betrachtet) $\rightarrow$ $\hbar\omega' + e^-$

'Stoß', Klein-Nishina-Formel

Paarbildung:

ab 1 MeV

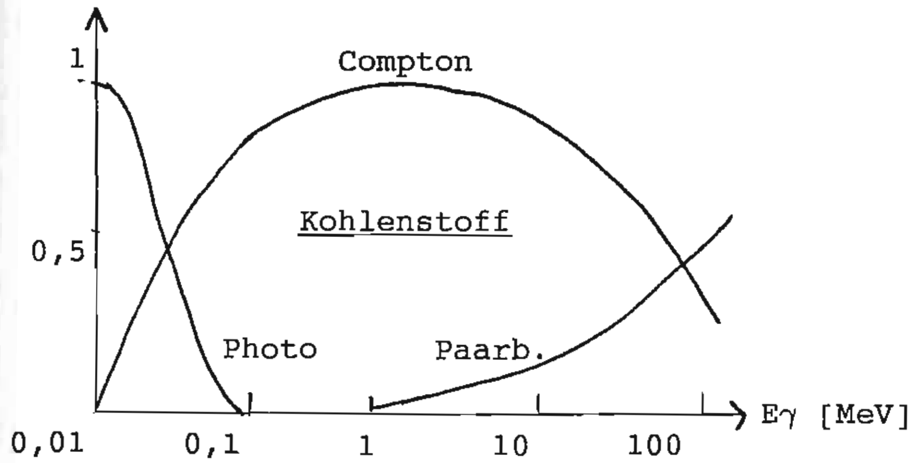
$\hbar\omega \xrightarrow[\text{+ Kerncoulomb-potential}]{} e^+ + e^-$

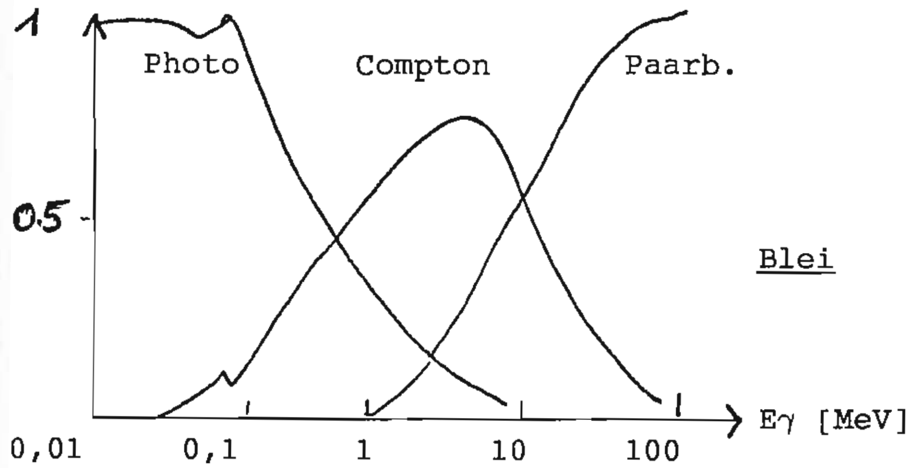
grob: Photoeffekt im keV-Bereich, Compton-Effekt im MeV-Bereich und Paarbildung ab ca. 10 MeV entscheidend

genauer: Wegen der hohen Z-Abhängigkeit von Photoeffekt und Paarbildung ist der relative Beitrag zur $\gamma$-Abschwächung verschieden (s. Diagramme für C und Pb)

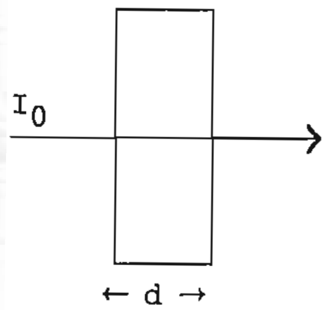


Relativer Beitrag zur $\gamma$-Abschwächung



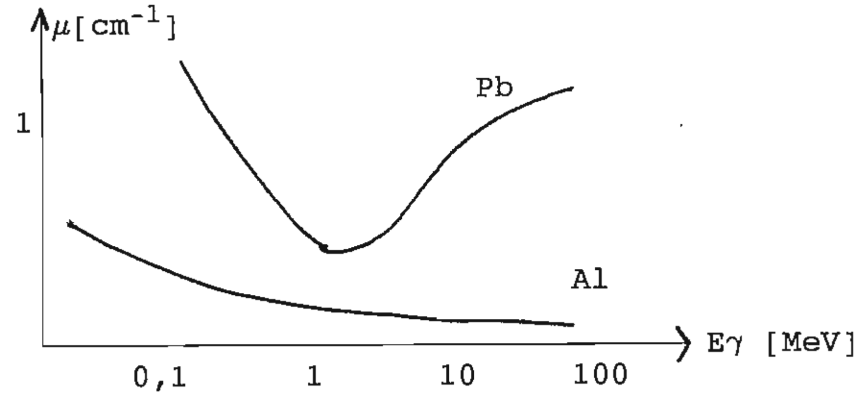

Abschwächungskoeffizient $\mu = \mu(\text{Photo}) + \mu(\text{Compton}) + \mu(\text{Paar})$




$I = I_0\, e^{-\mu d}$

Halbwertsdicke $d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}69}{\mu}$

Zehnteldicke $d_{1/10} = \frac{\ln 10}{\mu} = \frac{2{,}3}{\mu}$




z. B. $E_\gamma$ = 1 MeV

| | $d_{1/2}$ [cm] | $d_{1/10}$ [cm] |
|---|---|---|
| Pb | 1,2 | 4 |
| $H_2O$ | 15 | 48 |
| Beton | 5-6 | 15-20 |

c) Neutronen

1) Schnelle n abbremsen: nach Stoßkinematik am besten durch Kernstöße mit leichten Kernen, z. B. $H_2O$, Graphit, Paraffin

2) Absorption: besonders gut bei thermischen n durch Cadmium ($Cd^{113}$, 13% im nat. Gemisch) mit $d_{1/10}$ = 0,18 mm

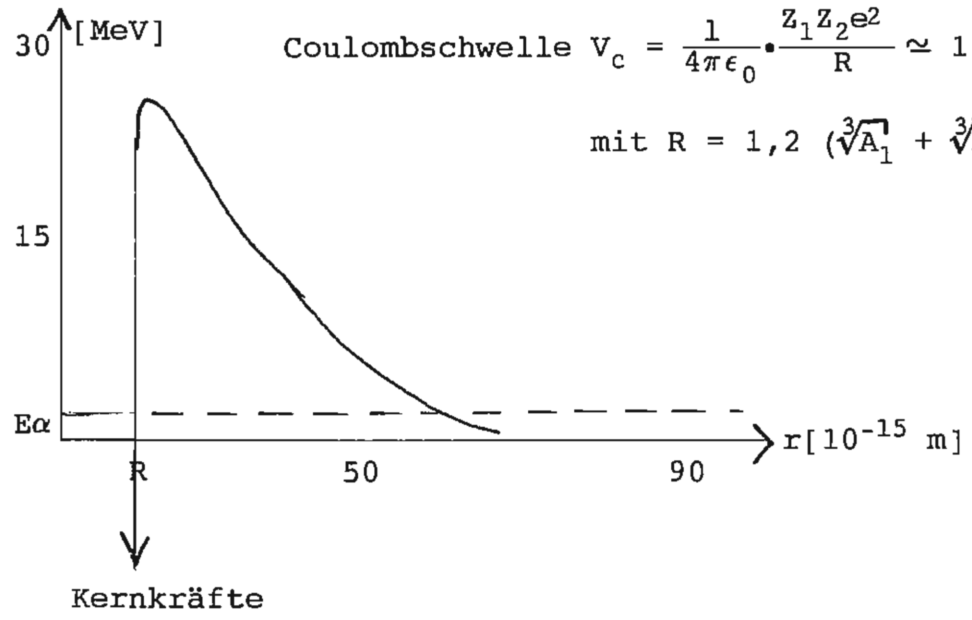
| | $E_n$ [MeV] | $d_{1/10}$ [cm] |
|---|---|---|
| Betonabschirmung ($\rho \simeq 2{,}3$ kg/dm$^3$) | 1 | 8 |
| | 10 | 28 |
| | 100 | 80 |



## 11. Alpha-Zerfall

Warum nicht p, n, d-, sondern $\alpha$-Zerfall?
Grund: Die hohe Bindungsenergie $E_\alpha$ = 28 MeV bewirkt, daß diese Energie besonders für schwere Kerne (ab ca. ≃ 200) oft größer ist als die Ablösearbeit von 2 Protonen und 2 Neutronen, so daß $\alpha$-Zerfall energetisch möglich wird.

Warum nicht spontaner Zerfall in für Kernreaktionen typischen Zeiten von $10^{-21}$ s?
Grund: Coulombbarriere, Tunneleffekt



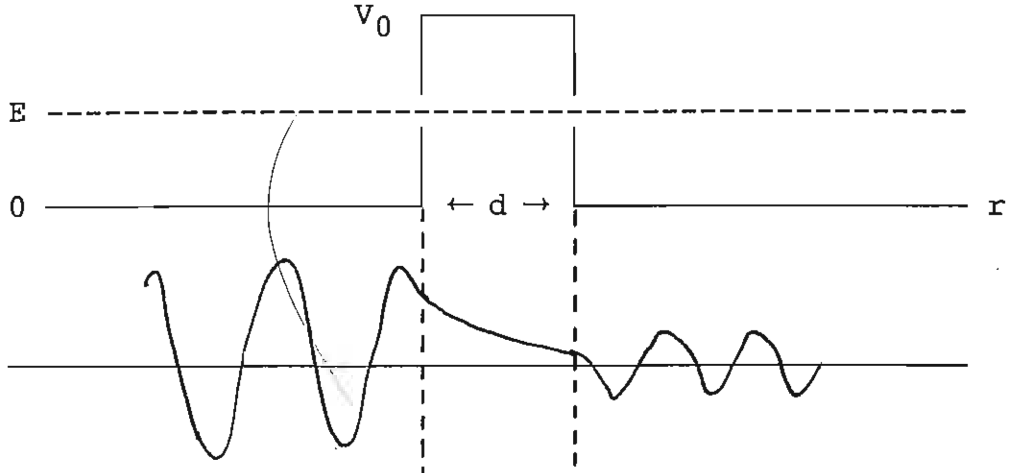

Coulombschwelle $V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \simeq 1{,}5 \cdot \frac{Z_1 Z_2}{R[10^{-15} m]}$ MeV

mit $R = 1{,}2\ (\sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A_2}) \cdot 10^{-15}$ m

z. B. $^{208}_{84}Po$: $R\ [10^{-15} m] = 1{,}2(\sqrt[3]{204} + \sqrt[3]{4}) = 1{,}2(5{,}9 + 1{,}6) \simeq 9$

$V_c\ [MeV] \simeq 1{,}5\ \frac{2 \cdot 82}{9} \simeq 27$

Tunneleffekt (Gamow): "Überspringen der Barriere wegen Energieunschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \simeq \hbar$". Vereinfacht mit Rechteckbarriere:




einl. W. $A\,e^{ikr}$ | $+Ce^{-Kr}$ | $+\,F\,e^{ikr}$ durchgetunnelte Welle

refl. W. $B\,e^{-ikr}$ | $+De^{Kr}$

$k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$ | $K = \sqrt{2\mu(V_0-E)/\hbar^2}$

$\simeq 0{,}2\,\sqrt{M_0 \bullet E} \bullet 10^{15}\,m^{-1}$

$M_0$ in $m_p$-Einheiten

E in MeV

Anpassung der Wellenfunktionen und ihrer Ableitungen an den beiden Sprungstellen ergibt 4 Bestimmungsgleichungen für die 5 Amplituden A, B, C, D, F (A Normierung).

Transmission $T = \dfrac{|F|^2}{|A|^2} \overset{\text{Rechnung}}{=\!=} [1 + \dfrac{V_0^2(e^{Kd}-e^{-Kd})^2}{16E(V_0-E)}]^{-1}$

Für "dicke" Barriere $Kd \gg 1$ ist $e^{Kd}$ der beherrschende Faktor, d.h. $T \simeq e^{-2Kd}$. Für allgemeinen Potentialverlauf: $T \simeq e^{-2G}$ mit Gamowfaktor $G = \int K dr$, z. B. für Coulombpotential ist der Gamowfaktor in mathematisch geschlossener Form angebbar und tabelliert.

Somit Übergangswahrscheinlichkeit $\lambda$ für $\alpha$-Zerfall:

$\lambda = \lambda_0 \bullet e^{-2G}$

$\uparrow$

"Wahrscheinlichkeit für die Bildung eines $\alpha$-Teilchens mal Zahl der Stöße/s gegen Potentialwall"

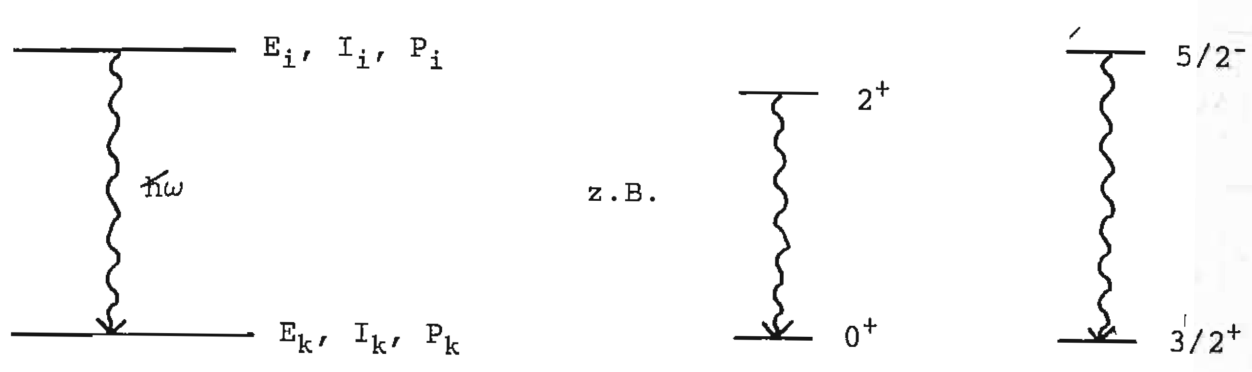
Zahl der Stöße $\approx \frac{v}{R} \simeq \dfrac{10^7 m/s}{10^{-14} m} \simeq 10^{21} s^{-1}$

Experimentell $\lambda_0 \simeq 10^{18} - 10^{19}\ s^{-1}$



| Beispiele: | $E\alpha$[MeV] | $e^{-2G}$ | $t_{1/2}$[s] |
|---|---|---|---|
| $^{208}_{84}Po$ | 5,1 | $3 \bullet 10^{-27}$ | $9{,}2 \bullet 10^7$ (3a) |
| $^{212}_{84}Po$ | 8,78 | $1{,}3 \bullet 10^{-13}$ | $3 \bullet 10^{-7}$ (0,3$\mu$s) |
| $^{224}_{88}Ra$ | 5,68 | $6 \bullet 10^{-26}$ | $3 \bullet 10^5$ (3d) |
| $^{144}_{66}Nd$ | 1,83 | $2 \bullet 10^{-42}$ | $6 \bullet 10^{22}$ ($2 \bullet 10^{15}$a) |

## 12. Gamma-Zerfall




Erhaltungssätze:

Energie:

$E_i - E_k = \hbar\omega$ (genauer abzüglich der Rückstoßenergie $E_R$ wegen

$P_i = 0 \rightsquigarrow P_k = E/c \rightsquigarrow E_R = P_k^2/2M = E^2/2Mc^2$

z. B. $\left.\begin{matrix} E = 1\ \text{MeV} \\ A = 50 \end{matrix}\right\}$ $E_R \simeq \dfrac{(10^6\,\text{eV})^2}{2\cdot 50\cdot 10^9\,\text{eV}}$

$\simeq 10$ eV

Drehimpuls:

$\vec{I}_i - \vec{I}_k = \vec{L}$ der vom $\gamma$-Quant weggeführte Drehimpuls, Multipolentwicklung

Parität:

$P_i \bullet P_k = P_{str}$ Parität der entsprechenden Multipolstrahlung

Multipolordnung $2^L$: L = 1 Dipol
L = 2 Quadrupol
L = 3 Oktupol etc.

Elektrische und magnetische Multipole:

E1 E2 E3 ...

M1 M2 M3 ...

mit unterschiedlicher Parität:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| elektrische | $E1^-$ | $E2^+$ | $E3^-$ ... | $(-1)^L$ |
| magnetische | $M1^+$ | $M2^-$ | $M3^+$ ... | $(-1)^{L+1}$ |



Danach wird beispielsweise für den Übergang $2^+ \to 0^+$ nur E2-Strahlung emittiert, während für einen $5/2^- \to 3/2^+$-Übergang theoretisch M4-, E3-, M2- und E1-Strahlung auftreten könnte. Da die Übergangswahrscheinlichkeit für wachsende Multipolordnung sehr stark abnimmt, kommt in der Praxis nur die niedrigste Ordnung - hier nur E1 - vor.

<u>Abschätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten:</u>

Allgemein für die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie einer mit der Beschleunigung b bewegten Ladung e:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{2e^2}{3c^3}\cdot b^2$$

Für einen <u>elektischen Dipol</u> $e\cdot r(t) = e\cdot r_0\cdot\cos\omega t$ gilt für die mittlere abgestrahlte Energie wegen $b = \omega^2\cdot\cos\omega t$ und $\overline{b^2} = \frac{1}{2}\omega^4\cdot r_0^2$

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{3c^3}\cdot\omega^4\cdot r_0^2$$

Die pro Zeiteinheit abgestrahlten Photonen erhält man nach Division von $\hbar\omega$ zu:

$$A = \overline{\frac{dE}{dt}}\,/\hbar\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\hbar}\cdot\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\cdot(er_0)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{\hbar c}}_{\alpha = \frac{1}{137}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\omega\cdot\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)^2$$

Für eine grobe Abschätzung ersetzt man $r_0$ durch den Kernradius R. Damit ist die entscheidende Größe $\frac{\omega R}{c} = \frac{R}{\lambda}$ das Verhältnis von Kernradius zur Wellenlänge/$2\pi$ der Strahlung. Mit $R \simeq 1{,}2\ \cdot\sqrt[3]{A}\cdot 10^{-15}$ m und $\lambda\!\!\!^{-} \simeq 200\ \cdot 10^{-15}$ m/E[MeV] ergibt sich für mittelschwere Kerne und $E \simeq 1$ MeV für dieses Verhältnis $R/\lambda \simeq 10^{-2}$. Wegen $\omega \simeq 10^{21}s^{-1}$ für $E \simeq 1$ MeV erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit $A \approx \frac{1}{137}\cdot 10^{21}\cdot 10^{-4}s^{-1} \simeq 10^{15}s^{-1}$. Für höhere elektrische Multipole wird der Faktor $(\frac{\omega R}{c})^2$ durch $(\frac{\omega R}{c})^{2L}$ ersetzt. Aufeinanderfolgende Multipolordnungen unterscheiden sich also bei $E \simeq 1$ MeV um ca. 4 - 5 Größenordnungen.

Für magnetische Dipolstrahlung wird eR durch $\mu_K$ ersetzt. Magnetische und elektrische Dipolübergänge unterscheiden sich demnach bei den Übergangswahrscheinlichkeiten um den Faktor $(\mu_K/eR)^2$. Aus der Unschärferelation $R \cdot m_p v \simeq \hbar$ erhält man für diesen Faktor $(\frac{e\hbar}{2m_p c}/eR)^2 \simeq (\frac{v}{c})^2 \simeq 10^{-2} - 10^{-3}$. Für höhere magnetische Multipolordnungen wird $\mu_K$ durch $\mu_K \cdot R^{L-1}$ ersetzt, so daß dieser Faktor auch für höhere Multipolordnungen gilt.

Zusammenfassend: $A(ML)/A(EL) \simeq (\frac{v}{c})^2$

$$A(EL+1)/A(EL) \simeq (R/ƛ)^2$$

Die experimentellen Werte sind für E1 um ca. $10^3 - 10^6$ langsamer, für E2 um ca $10^2$ schneller und für die übrigen Übergänge um ca. $10^1 - 10^2$ langsamer als die (Blatt-Weisskopf)-Abschätzungen.

Bei hohen Kernspindifferenzen zwischen den Übergangsniveaus ergeben sich sehr große Halbwertzeiten (sec ↔ Jahre) des angeregten Niveaus (isomere Zustände). Sie häufen sich für Kerne mit Z oder N kurz vor Erreichen der magischen Zahlen 50, 82, 126.

Bei hohen Multipolordnungen und/oder kleinen Übergangsenergien tritt als Konkurrenzprozeß die innere Konversion in den Vordergrund, bei der statt eines $\gamma$-Quants ein Hüllenelektron mit $E = E_\gamma - E_B$ ($E_B$ Bindungsenergie) emittiert wird. Dieser Effekt entspricht dem Augereffekt in der Atomhülle.



## 13. Beta-Zerfall

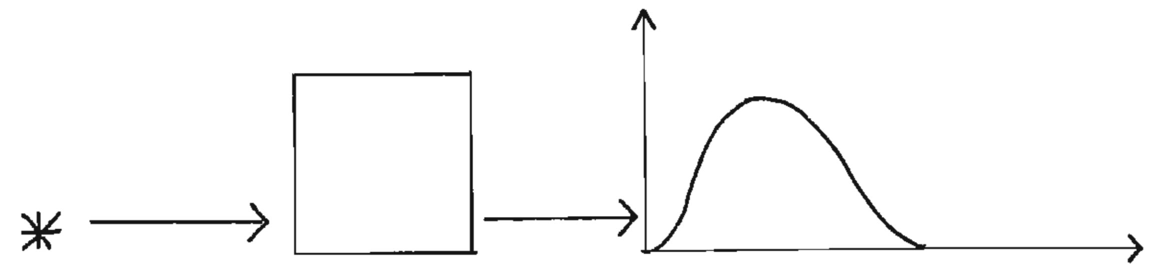
$$\left.\begin{array}{llll} & (A, Z) \longrightarrow (A, Z+1) + e^- + \tilde{\nu} & \beta^-\text{-Zerfall} \\ & (A, Z) \longrightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu & \beta^+\text{-Zerfall} \\ e^- + & (A, Z) \longrightarrow (A, Z-1) \quad + \nu & e^-\text{-Einfang} \end{array}\right\} \text{konkurrierend}$$

reduziert formuliert als

$$n \longrightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$$
$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu$$
$$e^- + p \longrightarrow n \quad + \nu$$

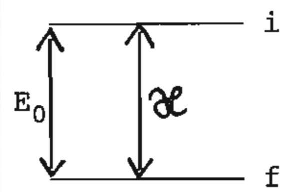
Beta-Zerfall energetisch möglich → siehe Isobarenregel als Folgerung aus der Weizsäckerschen Massenformel S. 8

Zählrate $\quad E_e = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (p_ec)^2}$




Beim $\beta$-Zerfall ist neben der Halbwertzeit $t_{1/2} = \frac{0,69}{\lambda}$ das Energie- bzw. Impulsspektrum der Elektronen (Positronen) meßbar. Ein theoretischer Ansatz muß die Form des Impulsspektrums $\lambda(p_e)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Elektrons (Positrons) mit dem Impuls $p_e$ wiedergeben. Die Intergration über alle $\lambda(p_e)$ ergibt die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit $\lambda = \int \lambda(p_e) dp_e$ und damit die Halbwertzeit $t_{1/2}$.

Fermi-Ansatz [Z. Physik 88, 161 (1934)] in Analogie zu elektromagnetischen Übergängen. Störungstheorie (Fermi Goldene Regel)




$$\lambda = \frac{2\pi}{h} |\mathcal{H}_{if}|^2 \cdot \frac{dN}{dE_0}$$

Wechselwirkungsoperator $\mathcal{H}$: $\langle \mathcal{H}_{if} \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H} \psi_i d\tau$

Dichte der Endzustände $dN/dE_0$

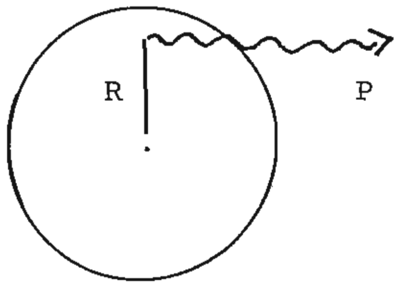
$$\langle \mathcal{H}_{if} \rangle = \int \Phi_\nu^*(p_\nu)\cdot\Phi_e^*(p_e)\cdot\Phi_f^*(A,\ Z+1)\cdot\mathcal{H}\cdot\Phi_i(A,\ Z)\,d\tau$$

Leptonen-Wellenfunktionen      Nukleonen-Wellenfunktionen

(Integration wegen Nukleonen-WF nur über das Kernvolumen)

Bei Leptonen-WF Ansatz freier Teilchen, d. h. auslaufende ebene Wellen $\Phi(\vec{p}) \sim e^{i(\vec{p}\vec{r})/\hbar} = 1 + i(\vec{p}\vec{r})/\hbar - \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{r}/\hbar)^2 + \ldots$ Bei der Integration kann man zunächst alle Anteile mit $\vec{p}\vec{r}/\hbar$ vernachlässigen, da für $E_e \gtrsim 1$ MeV und für alle $E_\nu$ gilt: $\hbar/p = \lambda\!\!\!^{-} \simeq 200\cdot10^{-15}\mathrm{m}/E[\mathrm{MeV}]$ und damit $pR/\hbar \approx 10^{-2}$. Man betrachtet die Leptonenwellenfunktionen also als konstant im Bereich des Kernvolumens. Diese Näherung ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß bei der Leptonenemission kein Bahndrehimpuls weggetragen wird ("erlaubte" Übergänge $\Delta l = 0$).

"klassische" Deutung




$L = p\cdot R \overset{QM}{\simeq} n\cdot\hbar$

Bei $pR/\hbar \ll 1$ ist nur $n = 0$ maßgebend

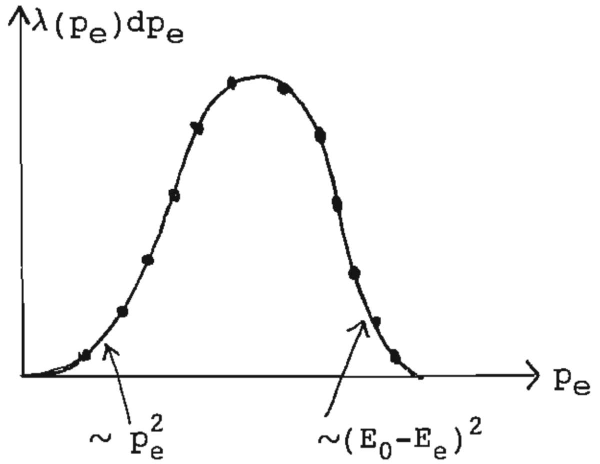
Den Wechselwirkungsoperator ersetzt man durch die Kopplungskonstante g, so daß $\langle\mathcal{H}_{if}\rangle$ insgesamt unabhängig von $p_e$ wird und die Abhängigkeit des Impulsspektrums allein im statistischen Faktor $dN/dE_0$ (der Dichte der Endzustände) steckt.

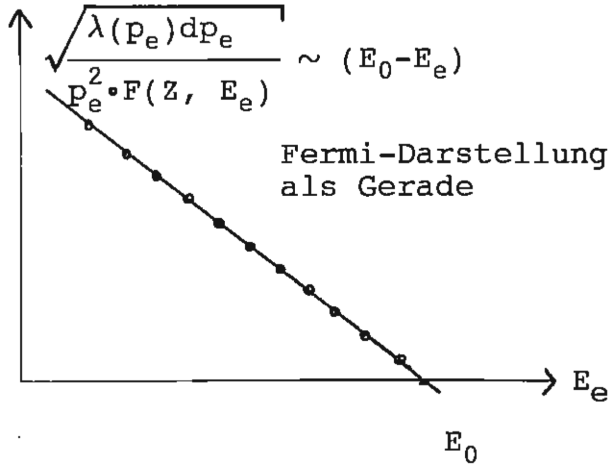
Allgemein bei freien Teilchen $dN \sim p^2\,dp$, somit bei gleichzeitiger Emission beider Leptonen $dN \sim dN(p_e)\cdot dN(p_\nu)$ mit $E_0 = E_e + E_\nu = \sqrt{(m_0c^2)^2+(p_ec)^2} + p_\nu c$ (Neutrinomasse = 0 gesetzt). Damit wird das Impulsspektrum $\lambda(p_e)dp_e$:

$$\lambda(p_e)dp_e \sim \frac{dN}{dE_0} \sim \frac{p_e^2dp_e\cdot p_\nu^2dp_\nu}{dE_0} \sim \underline{\underline{p_e^2(E_0-E_e)^2dp_e}}$$

wegen $p_\nu^2 = (E_0-E_e)^2/c^2$ und $dp_\nu/dE = 1/c$






$F(Z,\ E_e)$ Coulomb-Korrekturfunktion für WW von Kern mit $e^\pm$.

Durch Extrapolation bei der Fermi-Darstellung Bestimmung von $E_0$. Damit auch die Möglichkeit zur Bestimmung einer möglichen Neutrinomasse, deren Existenz einen großen Einfluß auf Struktur und Entwicklung des Universums hat. Dabei wegen Fehlerabschätzung $E_0$ möglichst klein wählen, z. B. Tritium-Zerfall $^3H \rightarrow {}^3He + e^- + \tilde{\nu}$ mit $E_0 = 18$ keV ($t_{1/2} \simeq 12a$)[$m_\nu c^2$ zur Zeit $\lesssim 7$ eV].

Integration über Impulsspektrum:

$$\lambda = \frac{0{,}69}{t_{1/2}} = \int_0^{p_0} \lambda(p_e)dp_e = \text{const.}\ f(Z,\ E_0)$$

↑ über Coulomb-Korrekturfaktor

Die f-Werte sind tabelliert (z. B. Feenburg, Trigg, Rev. Mod. Phys. 22, 399). Sie enthalten die gesamte Energieabhängigkeit.

Grobe Abschätzung:

nichtrelat. Bereich ($E_0 \ll 1$ MeV): $E_e \sim p_e^2 \curvearrowright f \sim \int p_e^6dp_e \sim p_0^7 \sim E_0^{3,5}$

relat. Bereich ($E_0 \gtrsim 1$ MeV): $E_e \sim p_e \curvearrowright f \sim \int p_e^4dp_e \sim p_0^5 \sim E_0^5$

Bei genauerer Betrachtung muß man berücksichtigen, daß die Spins der beiden Leptonen parallel (Gamow-Teller-Übergänge) oder antiparallel (Fermi-Übergänge) stehen können. Für erlaubte Übergänge ($\Delta l = 0$) gelten somit die Auswahlregeln:

Fermi-Ü: $\vec{I}_i = \vec{I}_f \curvearrowright \Delta I = 0$

Gamow-Teller-Ü: $\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{1} \curvearrowright \Delta I = 0,\ \pm1\ (0 \leftarrow\!|\!\rightarrow 0)$

anschaulich:

$$\Uparrow \longrightarrow \Uparrow + \Uparrow + \Downarrow \qquad \text{Fermi}$$
$$n \qquad\quad p \qquad e^- \qquad \tilde{\nu}$$
$$\Uparrow \longrightarrow \Downarrow + \Uparrow + \Uparrow \qquad \text{Gamow-Teller}$$

<u>Verbotene Übergänge:</u>

Merkmal: größere Drehimpulsänderungen, größere $ft_{1/2}$-Werte

Beiträge für diese Übergänge aus:

a) Reihenentwicklung der Leptonenwellenfunktionen

$$e^{ipr/\hbar} = 1 + \underbrace{i(pr/\hbar) - \tfrac{1}{2}(pr/\hbar)^2}_{\text{bisher vernachlässigt}} +-\ldots$$

b) relativistische Wellenfunktionen der Nukleonen mit $v_N/c$-Beiträge

Beispiele für erlaubte und verbotene Übergänge:

| | $I_i$ | | $I_f$ | $t_{1/2}$ | $E_{max}$[MeV] | $^{10}\log ft$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | $1/2^+$ | p | $1/2^+$ | 11,7min | 0,782 | 3,07 | (super)erlaubt |
| $^3H$ | $1/2^+$ | $^3He$ | $1/2^+$ | 12,4a | 0,018 | 3,03 | (super)erlaubt |
| $^6He$ | $0^+$ | $^6Li$ | $1^+$ | 0,81s | 3,5 | 2,77 | (super)erlaubt |
| $^{39}Ar$ | $7/2^-$ | $^{39}K$ | $3/2^+$ | 265a | 0,565 | 9,03 | einfach verboten |
| $^{22}Na$ | $3^+$ | $^{22}Ne$ | $0^+$ | 2,6a | 2,4 | 11,9 | zweifach verboten |
| $^{40}K$ | $4^-$ | $^{40}Ca$ | $0^+$ | $1,3\cdot10^9$a | 0,63 | 15,6 | dreifach verboten |
| $^{115}In$ | $9/2^+$ | $^{115}Sn$ | $1/2^+$ | $6\cdot10^{14}$a | 0,5 | 23 | vierfach verboten |



## <u>14. Neutrinoexperimente</u>

a) indirekt über Rückstoßkern b) direkt über inversen $\beta$-Zerfall

a) Rückstoßexperimente

am besten Elektroneneinfang wegen 2-Körperproblem, gut geeignet z.B.

$$e^- + {}^{37}Ar \xrightarrow[35d]{} {}^{37}Cl + \nu \quad \text{(freies Edelgasatom in einer Gaszelle)}$$
$$E_\nu = 810\,\text{keV}$$

Rückstoßenergie durch Flugzeitmessung: Rückstoßgeschwindigkeit $v$:

$$Mv = p_\nu = E_\nu/c \qquad v/c = E_\nu/Mc^2$$
$$= 8,1\cdot10^5\ \text{eV}/37\cdot10^9\ \text{eV} \simeq 2\cdot10^{-5}$$
$$v = 6\cdot10^5\ \text{cm/s}$$

Exp. von Rodebach und Allen [Phys. Rev. <u>86</u>, 446 (1952)] durch Koinzidenz von dem schnellen Augerelektronensignal (Startsignal) und dem (verzögerten) Ionensignal ($^{37}Cl^+$), das bei einer Wegstrecke von z.B. $l = 6$ cm eine Flugzeit von $t = l/v = 6\ \text{cm}/6\cdot10^5\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1} = 10\ \mu\text{s}$ benötigt.

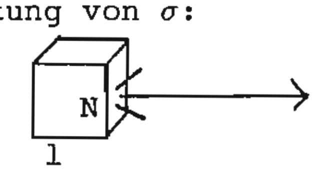
b) Inverser $\beta$-Zerfall

aus
$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu$$
$$\tilde{\nu} + p \longrightarrow n + e^+ \qquad \text{inverser } \beta\text{-Zerfall, } E_0 \simeq E_{\tilde{\nu}}$$

Wirkungsquerschnitt für $E_{\tilde{\nu}} \approx$ MeV $\quad \sigma \simeq 10^{-48}\ \text{m}^2$

($\sigma \sim E_\nu^2$ z.B. $E_\nu \approx$ GeV $\rightarrow \sigma \simeq 10^{-42}\ \text{m}^2$)

Bedeutung von $\sigma$:

$I_0$  $I = I_0\, e^{-\sigma N l}$ $\quad$ N Kerne/cm$^{-3}$

Festkörper z.B. Wasser $N(H_2O) \simeq 3\cdot10^{22}$ Moleküle/cm$^3$

$\sigma Nl$ = Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion

z.B. $N \simeq 10^{23}$ Kerne/cm$^3$, Targetlänge $l$ = gesamte Erde = $1,2\cdot10^9$cm

$$\curvearrowright \sigma\, Nl \simeq 10^{-44}\ \text{cm}^2\cdot10^{23}\ \text{cm}^{-3}\cdot1,2\cdot10^9\ \text{cm}$$
$$\simeq 10^{-12}$$

Starke Neutrinoquellen:

a) Reaktor ≙ Antineutrino-Quelle

Spaltprodukte wegen Neutronenüberschuß $\beta^-$-Strahler, die Antineutrinos emittieren.

Pro Spaltung ca. $6\tilde{\nu}$, daraus $\tilde{\nu}$-Produktion aus Reaktorleistung berechenbar:

Pro Spaltung wird ca. 200 MeV = $3{,}2 \cdot 10^{-17}$ MWs frei, d. h. bei Leistung $L = 1$ MW $\rightarrow N(\tilde{\nu}) = \dfrac{6\tilde{\nu} \cdot 1\,\mathrm{MW}}{3{,}2 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{MWs}} \simeq 2 \cdot 10^{17}\ \tilde{\nu}/\mathrm{s}$

b) Sonne ≙ Neutrinoquelle

Da bei der Fusion aus H → He entsteht, müssen dabei ebenso Neutrinos entstehen.

Fusion: $2e^- + 4p \xrightarrow{\text{CN-Zyklus}} He^4 + 2\nu$ + ca. 20 MeV, d.h. pro 10 MeV Fusionsenergie entsteht ca. 1 $\nu$.

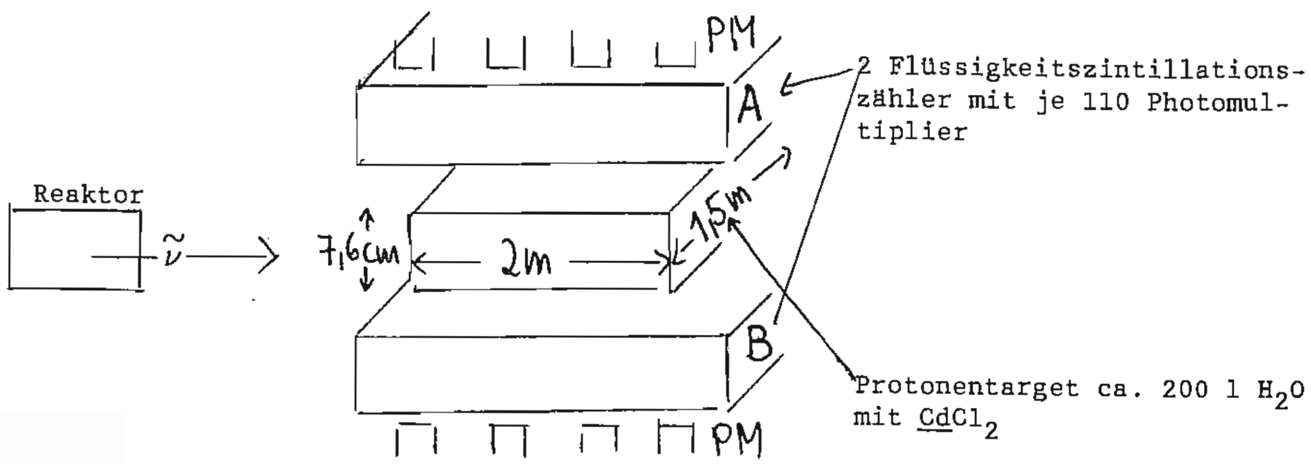
Damit Neutrinofluß auf der Erde aus Solarkonstante umgerechnet:

$S = 1{,}4\ \mathrm{kW/m^2} \qquad 1\nu \simeq 10\ \mathrm{MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{Ws}$

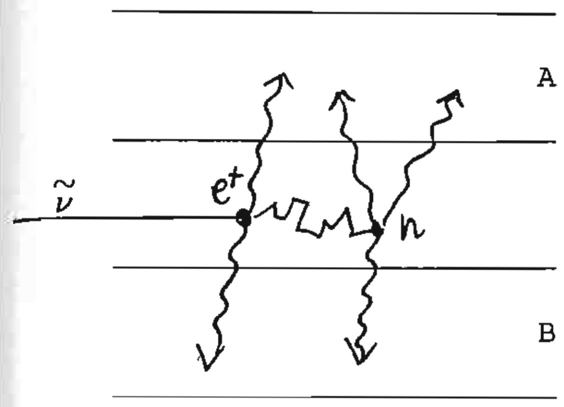
$$N(\nu) = \frac{1{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{Wm^{-2}}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Ws}/\nu} = 8 \cdot 10^{14}\,\nu/\mathrm{m^2 s}$$

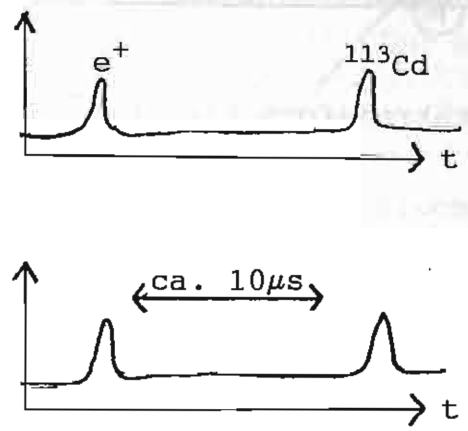
Erstes Experiment von Reines und Cowan [Phys. Rev. 92, 830 (53)] mit Reaktorantineutrinos. (Los Alamos)

Das Meßprinzip beruht darauf, daß bei einer möglichen Reaktion $\tilde{\nu} + p \rightarrow n + e^+$ die beiden Vernichtungsquanten aus der Positronzerstrahlung $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ ($E_\gamma = 0{,}5$ MeV) und nach einer bestimmten Abbremszeit durch Neutroneneinfang von $^{113}$Cd mehrere $\gamma$ aus dem Kaskadenzerfall des hochangeregten $^{114}$Cd ($E \approx 9$ MeV) in Mehrfachkoinzidenz gemessen werden.






Grobe Abschätzung der Zählrate:

$\sigma$ (Reaktor-$\tilde{\nu}$) $\simeq 10^{-47}\,\mathrm{m^2}$, Reaktor $L \simeq 10$ MW ≙ $2 \cdot 10^{18}\tilde{\nu}/\mathrm{s}$

Fluß in ca. 1 m Abstand $\Theta \simeq 10^{17}\tilde{\nu}/\mathrm{m^2 \cdot s}$,

Targetfläche $F = 7{,}6\ \mathrm{cm} \cdot 150\ \mathrm{cm} \simeq 0{,}1\ \mathrm{m^2}$, d. h. ca. $10^{16}\tilde{\nu}/\mathrm{s}$ durch Target von ca. 2 m Länge.

Reaktionswahrscheinlichkeit $\sigma N l \simeq 10^{-47}\mathrm{m^2} \cdot 10^{29}\mathrm{m^{-3}} \cdot 2\mathrm{m}$
$\simeq 10^{-18}$

Zählrate/s $\simeq 10^{16}\mathrm{s^{-1}} \cdot 10^{-18} \approx 10^{-2}\mathrm{s^{-1}}$

Großer Untergrund durch Reaktor und kosmische Strahlung. Erste Ergebnisse in Zählrate/min: 2,55 ± 0,15 Reaktor an
2,14 ± 0,13 Reaktor aus

0,41 ± 0,20/min

$\nu \neq \tilde{\nu}$-Experiment Davis et al., Phys. Rev. 97, 766 (1955)

Prinzip $e^- + {}^{37}Ar \longrightarrow {}^{37}Cl + \nu$

$\not\longleftarrow {}^{37}Cl + \tilde{\nu}$ ← Reaktor

4000 l $CCl_4$ wurden 30-70 Tage mit Reaktor-$\tilde{\nu}$ bestrahlt und etwa gebildetes $^{37}$Ar durch Aktivitätsmessung gezählt → Negatives Ergebnis.

## 15. Paritätsverletzung beim $\beta$-Zerfall

Paritätstransformation P: $\vec{r} \to -\vec{r}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{lin. Impuls} & \vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{dt} \to -\vec{p} \\ \text{el. Feld} & \vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{d\vec{A}}{dt} \to -\vec{E} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{polare Vektoren} \\ \text{"Richtung"} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Bahndrehimpuls} & \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} & \to +\vec{L} \\ \text{magn. Feld} & \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} & \to +\vec{B} \\ \text{Spin} & \vec{\sigma} & \to +\vec{\sigma} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{axiale Vektoren} \\ \text{"Drehsinn"} \end{array}$$

Skalarprodukte:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{pol. V} \cdot \text{pol. V}) & \to +(\ \cdot\ ) \\ (\text{ax. V} \cdot \text{ax. V}) & \to +(\ \cdot\ ) \end{array}\right\} \quad \text{Skalar}$$

$$(\text{pol. V} \cdot \text{ax. V}) \to -(\ \cdot\ ) \qquad \text{Pseudoskalar}$$

Bei Paritätserhaltung (starke WW, elektromagn. WW) müssen die exp. Ergebnisse nach der Paritätsoperation die gleichen sein und somit pseudoskalare Größen identisch verschwinden. Falls pseudoskalare Größen $\neq 0$ $\curvearrowright$ Parität verletzt.

Pseudoskalare aus den Meßgrößen des $\beta$-Zerfalls:

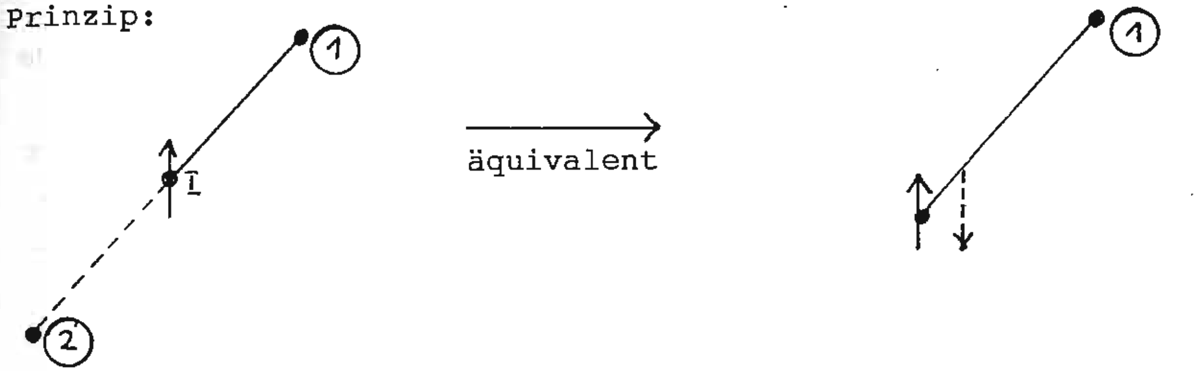
$\vec{p}_e$, $\vec{\sigma}_e$, $\vec{p}_\nu$, $\vec{\sigma}_\nu$, $\vec{I}_{Kern}$:

| | |
|---|---|
| $(\vec{p}_e\ \vec{I})$ | Winkelverteilung von Elektronen gegenüber ausgerichteten Kernen |
| $(\vec{p}_e \cdot \vec{\sigma}_e)$ | longitudinale Polarisation (Helizität) der |
| $(\vec{p}_\nu \cdot \vec{\sigma}_\nu)$ | Elektronen bzw. Neutrinos |

Erstes Experiment zur Paritätsverletzung: Winkelverteilung der Elektronen gegenüber ausgerichteten $^{60}$Co-Kernen Wu et al., Phys. Rev. 105, 1413 (1957)
(theoretischer Anstoß von Lee und Young aus dem Zwei- bzw. Drei-Pionenzerfall der Kaonen)

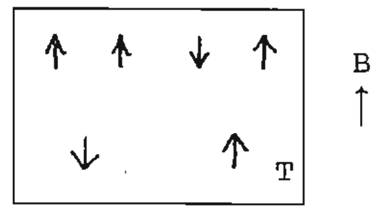


Prinzip:




Intensitätsmessung der emittierten Elektronen mit festem Impuls $p_e$ bei (1) und (2) $\to$ äquivalent Kernspinumkehr und Messung bei (1).

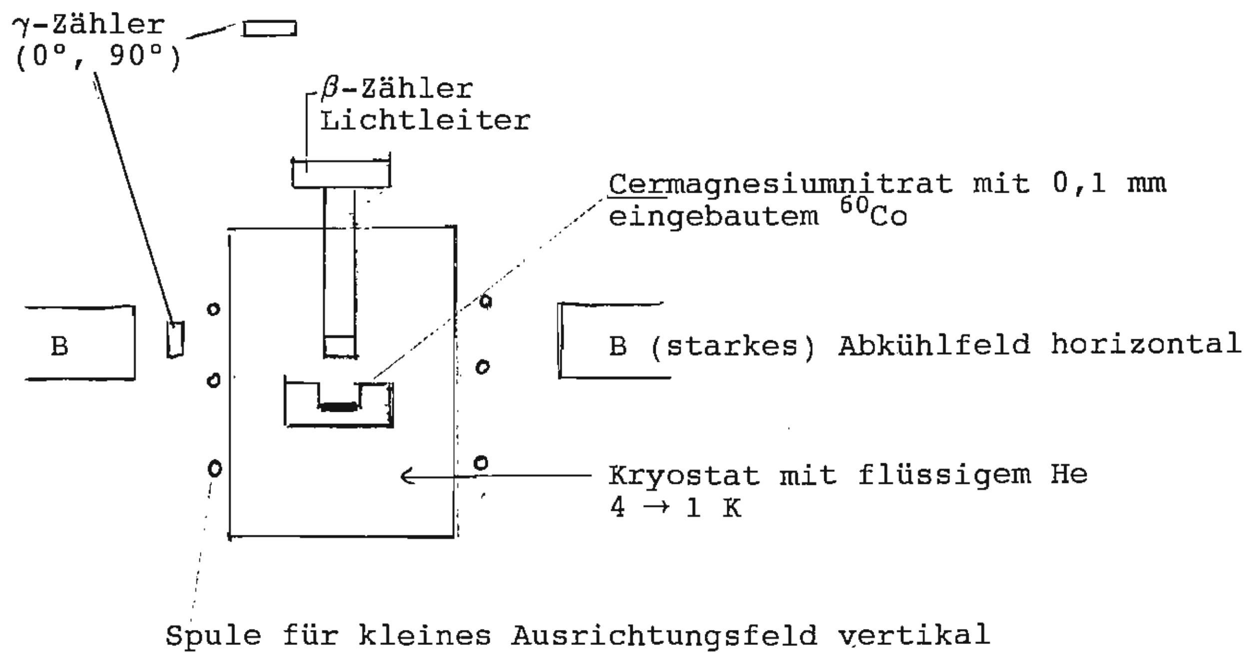
Exp. Schwierigkeit: Kernspinausrichtung
Magnetfeld $\vec{B}$, Festkörper mit Temperatur T
Ausrichtende Wirkung $(\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}) \simeq \mu_K B$, $\mu_K = 5 \cdot 10^{-27}$ J/T
Dagegen wirkt die thermische Energie kT, $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J/T
z. B. $I = \frac{1}{2}$




Boltzmann $N_\downarrow / N_\uparrow = e^{-(\vec{\mu}_I \vec{B})/kT}$

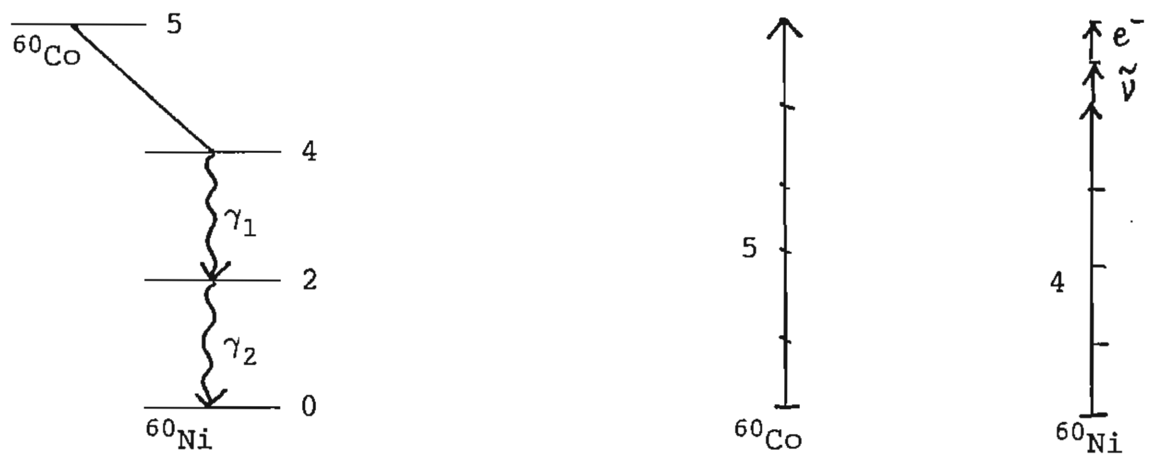
Bedingung für (teilweise) Ausrichtung $\mu_K B \gtrsim kT$
Experimentell erreichbar bei

| | | |
|---|---|---|
| $B \simeq$ | 10 - 100 T | durch innere Magnetfelder paramagnetischer Ionen |
| $T \simeq$ | $10^{-2}$ K | durch adiabatische Demagnetisierung |



Probe mit flüssigem He abkühlen, horizontales Magnetfeld $B \simeq 1$ T anlegen und Orientierungswärme durch He-Sieden abführen. Danach He abpumpen und B langsam abschalten. Adiabatische Demagnetisierung ergibt Abkühlung auf ca. $10^{-2}$ K. Kleines vertikales Magnetfeld mit $B \simeq 10^{-2}$ T reicht zur Ausrichtung der Co-Hülle (wegen anisotropem g-Faktor bewirkt das Ausrichtungsfeld nur eine sehr kleine Erwärmung), diese wirkt mit $B \simeq 10 - 100$ T auf ihren Kern und richtet ihn aus $\curvearrowright \beta$ zählen und das gleiche mit umgepoltem vertikalem Ausrichtungsfeld wiederholen. Wegen der Erwärmung der Probe hatte man ca. 10 Min. Zeit. Die zeitliche Abhängigkeit der Ausrichtung durch die Erwärmung wurde durch die 0° - 90° Asymmetrie der 1,13 MeV bzw. 1,33 MeV $\gamma$ in den $\gamma$-Zählern gemessen.

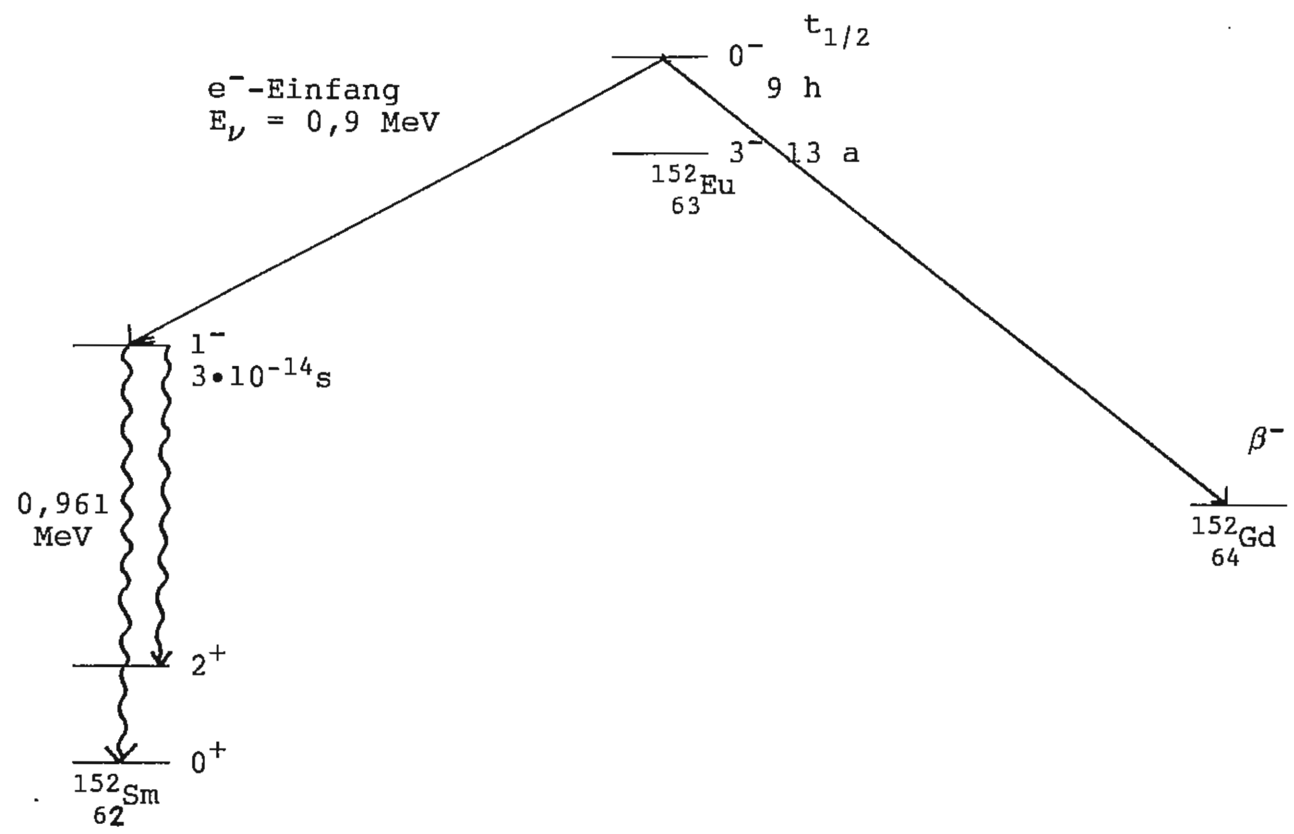
Ergebnis: Es wurden mehr $\beta$ entgegengesetzt zur Richtung des Kernspins I als in Richtung von I emittiert. (Unterschied zur Isotropie ca. 30%). Das bedeutet, daß die Elektronenspins bevorzugt antiparallel zur Flugrichtung stehen.




Weitere Experimente zur Paritätsverletzung:
Messung der Longitudinalpolarisation (Helizität) der Neutrinos bzw. der Elektronen.

Neutrinohelizität → Goldhaber et al., Phys. Rev. 109, 1015 (1958)






Es interessiert der K-Einfang des angeregten $0^-$-Niveaus von $^{152}$Eu in das angeregte $1^-$-Niveau des $^{152}$Sm und danach der $\gamma$-Übergang (0,961 MeV) in das Grundzustandsniveau $0^+$

$$e_K(\tfrac{1}{2}) + {}^{152}\mathrm{Eu}(0) \rightarrow {}^{152}\mathrm{Sm}(1) + \nu(\tfrac{1}{2})$$

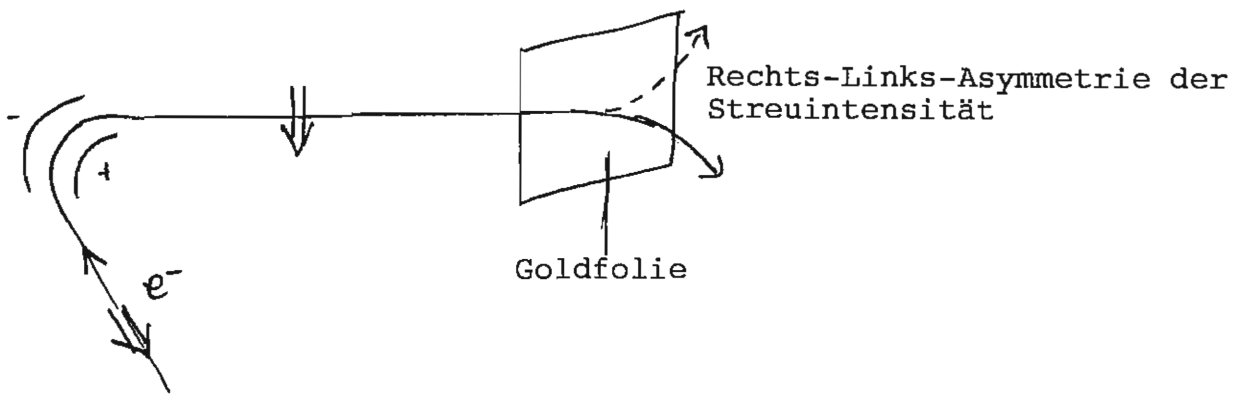
Wegen Impulserhaltung sind die Flugrichtungen des Rückstoßkerns $^{152}$Sm(1) und des Neutrinos entgegengesetzt. Wegen Drehimpulserhaltung sind die Spins der beiden entgegengesetzt. Also hat der Rückstoßkern die gleiche Helizität wie das emittierte Neutrino. Bei dem schnellen $\gamma$-Zerfall $^{152}$Sm(1) → $^{152}$Sm(0) + $\gamma$(1) wird die Drehimpulsrichtung unverändert an das $\gamma$ weitergegeben, d.h. diejenigen $\gamma$, die in gleicher Richtung wie der Rückstoßkern $^{152}$Sm(1) emittiert werden, haben die gleiche Helizität wie das Neutrino.

Diese $\gamma$ können dadurch nachgewiesen werden, daß nur sie resonant in einem Sm-Absorber absorbiert werden können, da bei ihnen die üblicherweise fehlende Rückstoßenergie gerade kompensiert wird, da zufälligerweise die Energie $E_\nu$ = 0,9 MeV vom K-Einfang mit der Energie $E_\gamma$ = 0,961 MeV in etwa übereinstimmt. Die Helizität dieser resonant absorbierbaren $\gamma$ wird durch Compton-Streuung an polarisiertem Eisen gemessen.

Ergebnis: Die $\gamma$ sind linkszirkular polarisiert und damit die Helizität des Neutrinos negativ.

Ein ähnliches Ergebnis erhält man bei der Helizitätsmessung der Elektronen, deren Longitudinalpolarisation zunächst durch eine Bahnablenkung in eine Transversalpolarisation verwandelt wird (unrelat. 90° Ablenkung, relat. mehr wegen Spin-Bahn-Kopplung) und dann mit der spinabhängigen Mott-Streuung gemessen wird.

Prinzip




Ergebnis: $\mathcal{H} = \frac{(\vec{p}\vec{\sigma})}{|\vec{r}||\vec{\sigma}|} = -\frac{v}{c}$ Elektronen

$= +\frac{v}{c}$ Positronen

Zusammengefaßt: Beim $\beta$-Zerfall werden die Teilchen ($e^-$, $\nu$) linkshändig, die Antiteilchen ($e^+$, $\tilde{\nu}$) rechtshändig emittiert.



## 16. Schwache Zerfälle von Pionen und Myonen

Neben "normalem" $\beta$-Zerfall der Nukleonen schwache Zerfälle auch bei anderen "Elementarteilchen", erkennbar an der relativ großen Lebensdauer.

Pionen (vor Quarkmodell Austauschteilchen der starken WW)

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

$\pi^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$ $\quad t_{1/2} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$s, dagegen $\pi^0 \underset{\text{elektro-magn. WW}}{\longrightarrow} 2\gamma$ mit $t_{1/2} = 10^{-16}$s

Ruhemassen: $\pi^\pm$ 139,6 MeV

$\mu^\pm$ 105,6 MeV $\quad \Delta E = 34$ MeV $= 30$ MeV $(E_\nu) + 4$ MeV $(E_\mu)$

$\nu_\mu \neq \nu_e$ Experiment von Danby et al. Phys. Rev. Lett. 9, 36, (1962)

Prinzip $\nu_\mu + n \to \mu^- + p$ nachgewiesen

$\not\to e^- + p$ "inverser $\beta$-Zerfall" nicht nachgewiesen

Myonen ("schwere" Elektronen)

$\mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$

$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu$ $\quad t_{1/2} = 2 \cdot 10^{-6}$s

Tau-Teilchen

$\tau^\pm$ "superschwere" Elektronen $m_\tau c^2 \simeq 1{,}8$ GeV

und damit dritte Sorte von Neutrinos, die Tau-Neutrinos $\nu_\tau$ (1976).

Nach dem Vorbild der Vereinheitlichung von elektrischen und magnetischen Vorgängen durch Maxwell nun Vereinheitlichung von elektromagnetischer und schwacher WW zur elektroschwachen WW (Glashow 1960), Weinberg und Salam 1967). Dabei treten 4 Austauschteilchen, nämlich das masselose Photon und die drei massiven intermediären Bosonen $W^\pm$ (81 GeV) und $Z°$ (94 GeV) auf. Der $\beta$-Zerfall kann damit gewissermaßen als "Zweistufenprozeß" beschrieben werden, z. B.

$n \to p + W$

$\quad\quad\; \hookrightarrow e^- + \tilde{\nu}_e$.

Zusammenfassung mit den Quarks zum Standardmodell:

| | Quarks | | Leptonen | |
|---|---|---|---|---|
| Q: | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | | |
| 1. Gen. | up | down | e | $\nu_e$ |
| 2. Gen. | charm | strange | $\mu$ | $\nu_\mu$ |
| 3. Gen. | top | bottom | $\tau$ | $\nu_\tau$ |

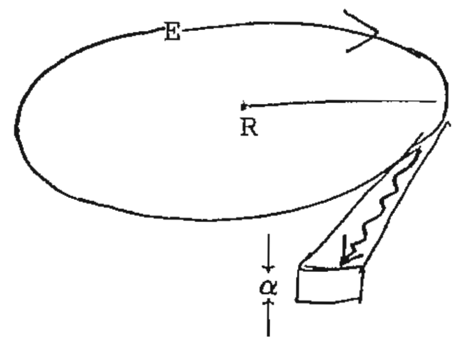
Baryonen z. B. p = (u u d)
Mesonen z. B. $\pi^- = (d\ \bar{u})$
Gluonen (masselose Vektorbosonen)
als Austauschteilchen für die starke WW



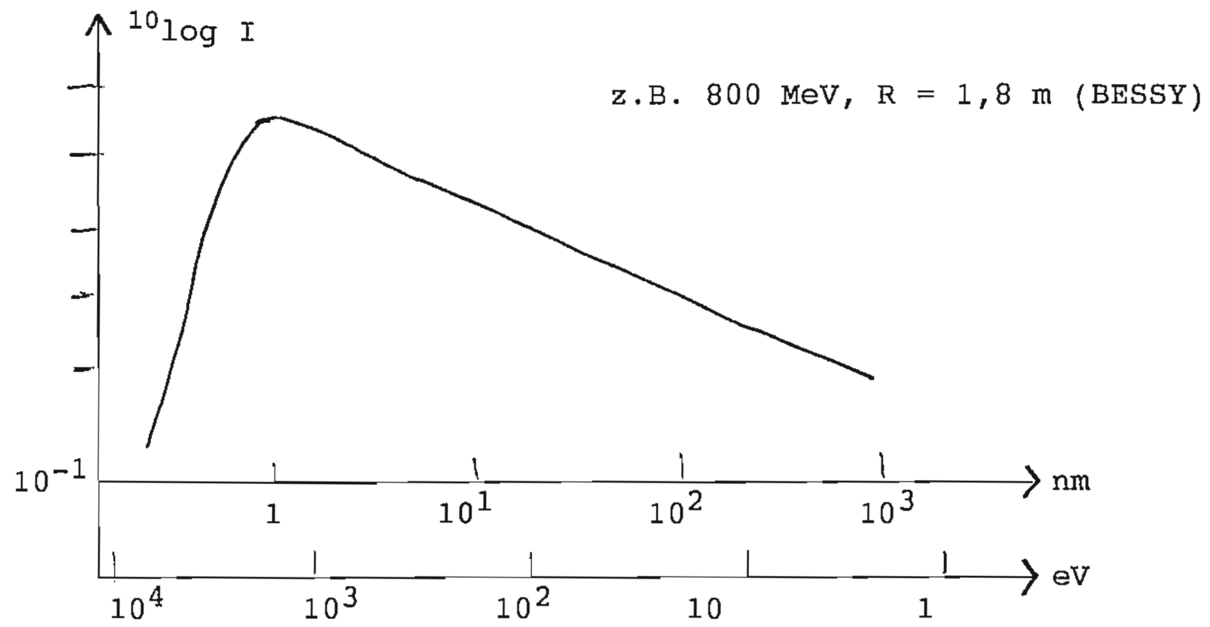
## 17. Synchrotron- und Laserstrahlung

Wichtigste experimentelle Entwicklungen der letzten 20 Jahre:
Speicherringe (Hochenergiephysik) und Laser.

### I. Synchrotronstrahlung




Maxwell-Gl., retardierte Potentiale (Relat.theorie) → Schwinger-Gleichungen




Spektralverteilung der Strahlung

$I(\lambda) \sim (\frac{\lambda_c}{\lambda})^4 \qquad \lambda \gtrsim \lambda_c$

kritische Wellenlänge $\lambda_c = \frac{4\pi R}{3\gamma^3}$ , $\gamma = \frac{E}{mc^2}$

BESSY: R = 1,8 m, E $\simeq$ 800 MeV $\curvearrowright \gamma \simeq 1600$ : $\lambda_c \simeq 2$ nm

Vertikale Divergenz $\alpha$:

$\alpha \simeq \frac{2}{3\gamma}\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{1/3}$   $\lambda \gtrsim \lambda_c$   z.B. $\lambda = 100$ nm $\curvearrowright$ $\alpha \simeq 1{,}5$ mrad

Zeitstruktur:

Im Multi-bunch-Betrieb ca. 100 bunches ($l \approx 3$ cm) im Ring von $l = 60$ m und 500 MHz HF-Sender:

100 ps-Pulse mit 2 ns-Abstand (Umlaufzeit 200 ns)

## II. Laser

Grundgleichungen

Lasertypen: Gaslaser: He-Ne, Edelgasionen-Laser (CW)

$N_2$-, Excimer-Laser (gepulst)

Festkörper: Nd:YAG-, Rubin-, Halbleiter-Laser

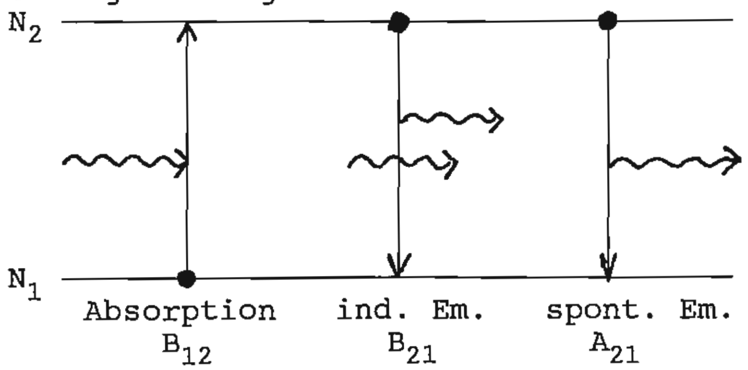
Flüssigkeit: Farbstofflaser

Bestimmende Größen:

Wellenlänge $\lambda$, Schärfe $d\lambda$, Abstimmbereich $\Delta\lambda$, Divergenz $d\Omega$, Leistung L

Bei Pulsbetrieb: $\Delta t$ Pulsbreite, Pulsenergie E, Repetitionsrate

Grundgleichungen:




Einstein Ü-Koeff.

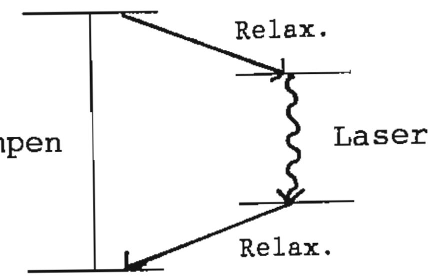
Im thermodynamischen Gleichgewicht: $A_{21}N_2 + B_{21}\cdot\rho(\gamma)\cdot N_2 = B_{12}\,\rho(\nu)\cdot N_1$ mit Boltzmann $N_2/N_1 = g_2/g_2\cdot\exp(-h\nu/kT)$ verwenden, nach $\rho(\nu)$ auflösen und mit Planckschem Strahlungsgesetz vergleichen, ergibt

a) $g_1\cdot B_{12} = g_2\cdot B_{21} \rightarrow$ Besetzungsinversion notwendig

b) $A_{21} = B_{21}\cdot\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3$ $\rightarrow$ $\nu^3$-Zunahme der störenden Spontanemission (siehe Röntgenlaserentwicklung)

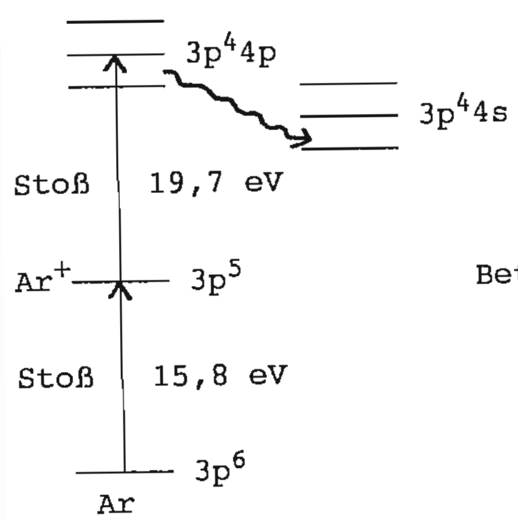


Pumpschema
4-Niveau




Einige Lasertypen:

Edelgasionenlaser z. B. $Ar^+$-Laser

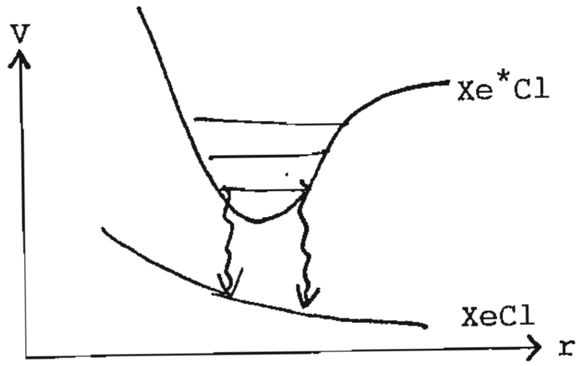



CW, sichtbar (450 - 550 nm)

z.B. $3p^4 4p\ ^4D_{5/2}-3p^4 4s\ ^2P_{3/2}$ $\lambda$ = 514,5 nm
488,0
457,9
etc.

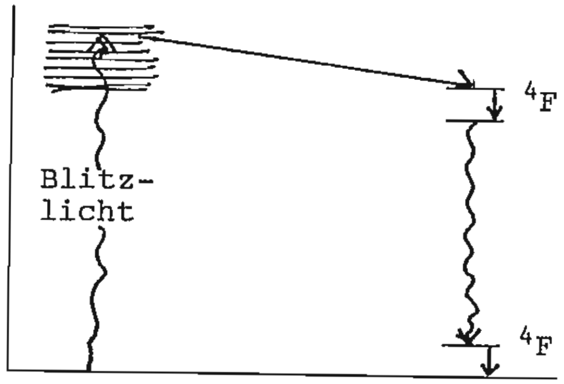
Betrieb z. B. 40 A/600 V $\rightarrow$ 24 kW
20 W all-line
(0,1% Wirkungsgrad)

Excimerlaser z. B. XeCl




gepulst, UV 351 - 353 nm
1 - 2 bar He Puffergas, 1 - 10% Xe,
0,2 % HCl, Pulslängen 5 - 15 ns,
Repetitionsrate $\simeq$ 100 Hz - 1 kHz
Impulsenergie $\simeq$ J Puls-Leistung
1J/10 ns = 100 MW
(Dauerleistung $\approx$ 1 - 100 W)

Nd: YAG-Laser  Yttriumaluminiumgranulat $Y_2Al_5O_{12}$

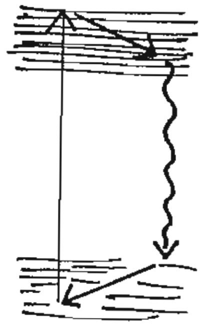


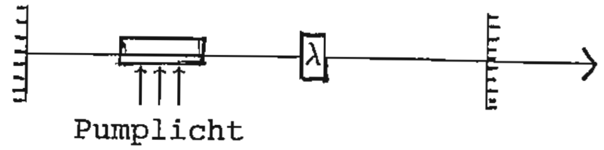

$+0{,}7\%$ Nd: $Nd^{3+}$ $4d^{10}$ $\underline{\underline{4f^3}}$ $5s^2$ $5p^6$

4f-Schale durch 5s, 5p abgeschirmt, Kristallfeldenfluß deshalb relativ gering

---

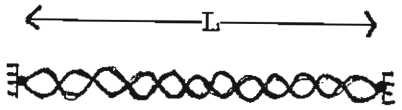
Farbstofflaser






---

Einmodenlaser




$L = m\cdot\frac{\lambda}{2}$

Resonator  $\lambda = \frac{2L}{m}$, $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c\cdot m}{2L}$

(longitudinaler) Modenabstand $d\lambda = \frac{2L}{m^2}$, $d\nu = \frac{c}{2L}$  $(d\nu = \frac{c}{\lambda^2}\, d\lambda)$

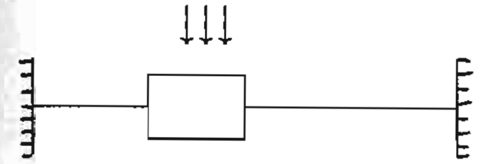
z. B. $L = 1\ m \curvearrowright d\nu = \frac{3\cdot 10^8 m/s}{2m} = 150$ MHz

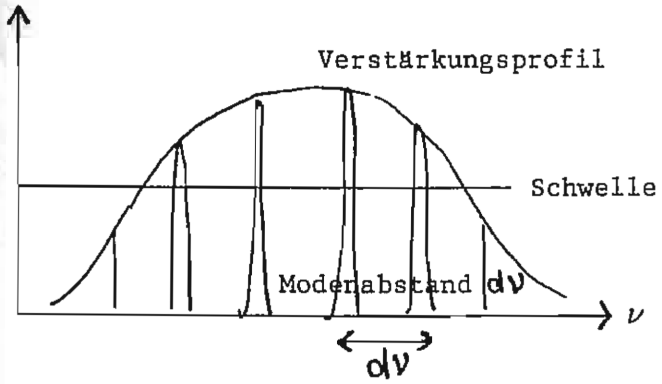
z. B. $\lambda = 500$ nm  $d\lambda = \frac{\lambda^2}{c} d\nu = \frac{25\cdot 10^{-14} m^2}{3\cdot 10^8 m/s}\cdot 1{,}5\cdot 10^8/s = 1{,}25\cdot 10^{-13} m$

$= 0{,}125$ pm

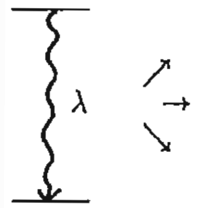
$= 1{,}25\cdot 10^{-3}$ A°








Verstärkerprofil z. B. Dopplerbreite, Druckverbreiterung, Stöße




Dopplerbreite $\frac{\Delta\nu_D}{\nu} = \frac{\Delta\lambda_D}{\lambda} \simeq \frac{v}{c}$  $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{3kT}{Mc^2}} \simeq 10^{-6}$

z. B. $\lambda = 500$ nm bzw. $\nu = c/\lambda = \frac{3\cdot 10^8}{5\cdot 10^{-7}}$ Hz $= 6\cdot 10^{14}$ Hz

$\Delta\lambda_D \simeq 5\cdot 10^{-13}$ m $= 0{,}5$ pm

$\Delta\nu_D \simeq 6\cdot 10^8$ Hz $= 600$ MHz

Exp. Beispiele: HeNe $\Delta\nu_D \simeq 1500$ MHz
$Ar^+$ $\Delta\nu \simeq 8000$ MHz
Farbstoff $\Delta\nu \simeq 10^3$ GHz (starke Stoßverbreiterung)

Einmodenlaser: Stufenweise Einschränkung durch verschiedene optische Filter (Lyot, Etalons)

Exp. Anforderungen bei gewünschter Linienbreite $d\nu_{Laser} \simeq 1$ MHz
z. B. $\lambda = 500$ nm $\curvearrowright \nu = 6\cdot 10^{14}$ Hz  $d\nu_{Laser}/\nu = 1{,}6\cdot 10^{-9}$
d. h. Resonatorstabilität $dL/L \simeq 10^{-9}$ (bei $L = 1$ m  $dL \le 1$ nm)
z. B. Temperaturstabilität: $dL/L = \alpha\cdot dT \curvearrowright dT \le 10^{-3}$ K
Invar z. B. $10^{-6}$/K

Druckabhängigkeit: statt L eigentlich $\rightarrow n \cdot L$ n Brechungsindex der Luft

$n = n(p) \simeq 1{,}0003\ldots$ für $p = p_o = 1$ bar

$dL/L = (n-1)\ dp/p_o = 3 \cdot 10^{-4} \cdot dp/p_o \rightsquigarrow dp \leq 3 \cdot 10^{-6}$ bar

$\leq 3 \cdot 10^{-3}$ mbar